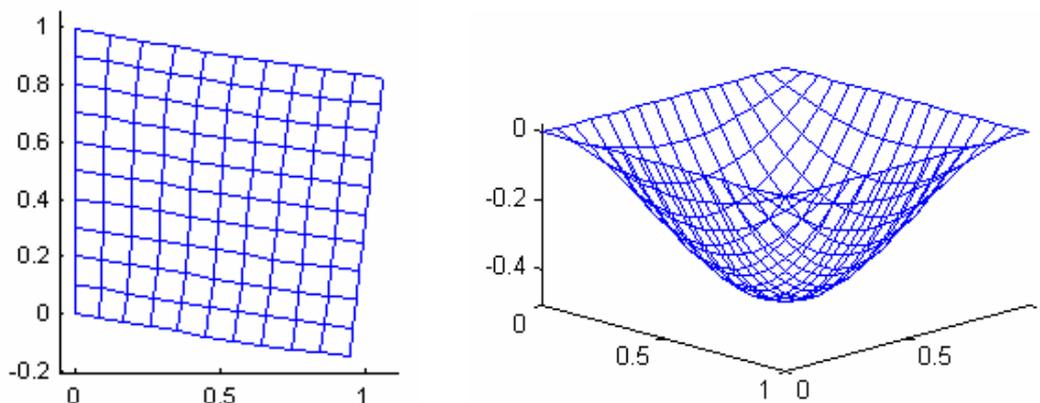




UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



**MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-
MISTOS DE TENSÃO NA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA
DE ESTRUTURAS LAMINARES PLANAS**

Luís André Marcos Mendes

(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas

Orientador: Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Júri:

Presidente: Doutor Eduardo Manuel Baptista Ribeiro Pereira

Vogais: Doutor Corneliu Cismasiu

Doutor Pedro Manuel de Castro Borges Dinis

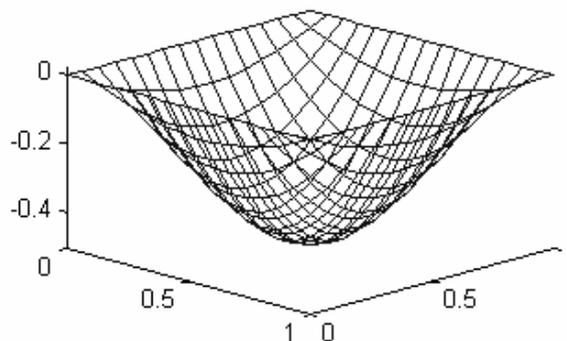
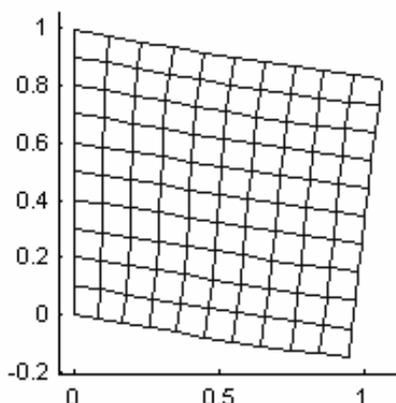
Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Novembro de 2002

(Revisão de Maio de 2004)



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



**MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-
MISTOS DE TENSÃO NA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA
DE ESTRUTURAS LAMINARES PLANAS**

Luís André Marcos Mendes
(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas

Orientador: Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Júri:

Presidente: Doutor Eduardo Manuel Baptista Ribeiro Pereira

Vogais: Doutor Corneliu Cismasiu

Doutor Pedro Manuel de Castro Borges Dinis

Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Novembro de 2002

Dedico este trabalho aos meus Pais.

Resumo

Nesta dissertação desenvolve-se um modelo de elementos finitos híbridos-mistos de tensão, para a análise elastoplástica de estruturas laminares planas (placas e lajes).

O modelo numérico é caracterizado por se aproximar, de forma simultânea e independente, os campos de tensões e de deslocamentos no domínio de cada elemento, e os campos de deslocamentos ao longo da fronteira estática, na qual se englobam as fronteiras inter-elementares. Para modelar os fenómenos locais associados ao aparecimento e ao desenvolvimento de deformações plásticas, os incrementos dos parâmetros plásticos são também directamente aproximados.

Na aproximação dos campos de tensão e de deslocamento, são utilizados polinómios ortogonais de Legendre, enquanto que nos incrementos das deformações plásticas se utilizam funções de Dirac e polinómios até ao segundo grau.

O modelo desenvolvido é caracterizado pela utilização do método de Newton-Raphson na resolução do sistema de equações não lineares. Foram ainda incorporados critérios de cedência adaptados à modelação de materiais com resistência combinada de atrito e coesão, tendo-se efectuado o estudo e implementação de diferentes técnicas para o controlo da cedência, nomeadamente o controlo em pontos de colocação e o controlo em células plásticas.

Com o objectivo de avaliar o desempenho do modelo desenvolvido, no final do trabalho é estudado um conjunto de casos de teste, efectuando-se a comparação com resultados obtidos de outras formulações.

Palavras Chave

Elementos Finitos

Modelos Híbridos-Mistos de Tensão

Análise Elastoplástica

Placas e Lajes

Polinómios de Legendre

Abstract

In this dissertation, a hybrid-mixed stress finite element model for the elastoplastic analysis of stretching and bending plates was developed.

The numerical model is characterized by the simultaneous and independent approximation of the stress and the displacement fields, in the domain of each element. The displacement field on the static boundary, which includes the inter-elementary boundaries, is also approximated. To model the local phenomena associated with the plasticity, the increment of the plastic parameters are also directly approximated.

The orthogonal Legendre polynomials are used as approximation functions for the stress and displacements fields. Dirac functions and low degree polynomial functions are used to model the increments of plastic parameters.

The numerical model is characterized by the use of the Newton-Raphson method in the solution of the non-linear system of equations. Yield criteria suitable for simulating the behaviour of hydrostatic pressure dependent materials has been incorporated. Two different techniques to control yield have been studied, namely control at the collocation points and control based on plastic cells.

With the objective of testing and assessing the performance and accuracy of the model, a group of test cases has been considered. The results are compared with those obtained from other formulations.

Keywords

Finite Elements

Hybrid-Mixed Stress Models

Elasto-plastic Analysis

Stretching and Bending Plates

Legendre Polynomials

Agradecimentos

Esta dissertação foi desenvolvida no âmbito do programa de investigação conjunta entre o *Instituto de Engenharia de Estruturas Território e Construção* (ICIST) e o *Laboratório Nacional de Engenharia Civil* (LNEC), denominado *Elementos Finitos de Tensão para a Análise de Barragens de Betão* (ECM-33066-99-00), financiado pelo projecto *POCTI*, e pela *Fundação da Ciência e da Tecnologia* (FCT).

Este trabalho recebeu inúmeras contribuições. Não posso deixar de mencionar algumas das pessoas que ao longo da minha vida, e em especial nestes últimos anos, me ajudaram a atingir este objectivo a que me propus.

Ao meu orientador, Professor Luís Castro, queria expressar toda a minha gratidão e reconhecimento por tudo aquilo que me ensinou, pela paciência que demonstrou, pelos momentos de agradável convívio que passámos juntos, que resultaram no fortalecimento dos laços de amizade que nos unem.

Ao coordenador do mestrado, Professor Eduardo Pereira, pela ajuda e encaminhamento que me deu, numa altura difícil do meu mestrado.

A todo o grupo de Análise de Estruturas, pela forma amigável como me acolheram, por terem acreditado em mim, e acima de tudo, por terem me dado a hipótese de fazer aquilo que mais queria. Gostaria também agradecer a ajuda do Carlos Tiago, disponibilizando resultados provenientes de outras ferramentas de cálculo, e as correcções a este texto sugeridas pelo Professor Orlando Pereira e pela Cristina.

À instituição LNEC, que com muito orgulho faço parte, pela compreensão e pelo tempo concedido para a conclusão desta dissertação, nomeadamente ao *Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica de Estruturas* (NESDE) do *Departamento de Estruturas* (DE) e ao *Núcleo de Modelação Matemática e Física* (NMMF) do *Departamento de Barragens de Betão* (DBB).

Aos meus alunos de estática, por terem ajudado a conhecer-me um pouco melhor.

A todos os meus amigos do IST, em particular à Rafaela e ao Hernâni pelos inúmeros momentos de convívio, e em especial pela compreensão e pela força que me deram.

Aos meus Pais, queria agradecer de forma especial o apoio e o carinho sempre demonstrado e a ajuda dada para que fosse possível lutar por este objectivo. Queria também agradecer aos

vi

meus avós.

À Ana e ao João, pela ajuda dada na correcção deste texto, e pelo carinho e compreensão que tiveram comigo ao longo destes últimos tempos.

A toda a minha família e a todos os meus amigos.

Obrigado!

Índice

1 INTRODUÇÃO

| | | |
|-----|------------------------------|---|
| 1.1 | Considerações Iniciais | 1 |
| 1.2 | Objectivos | 3 |
| 1.3 | Metodologia | 4 |
| 1.4 | Faseamento | 5 |
| 1.5 | Organização | 5 |

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

| | | |
|-------|--|----|
| 2.1 | Considerações Iniciais | 7 |
| 2.2 | Relações de Equilíbrio | 9 |
| 2.3 | Relações de Compatibilidade | 10 |
| 2.4 | Relações Constitutivas..... | 12 |
| 2.4.1 | Fase Elástica | 12 |
| 2.4.2 | Fase Plástica | 13 |
| 2.5 | Integração das Relações Constitutivas..... | 22 |

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

| | | |
|-------|---------------------------------------|----|
| 3.1 | Considerações Iniciais | 27 |
| 3.2 | Formulações de Elementos Finitos..... | 28 |
| 3.3 | Definição da Aproximação | 32 |
| 3.4 | Relações de Equilíbrio | 33 |
| 3.5 | Relações de Compatibilidade | 34 |
| 3.6 | Relações Constitutivas..... | 35 |
| 3.6.1 | Fase Elástica | 36 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.6.2 | Fase Plástica..... | 36 |
| 3.7 | Sistema Governativo | 38 |
| 3.7.1 | Modelo Elástico..... | 38 |
| 3.7.2 | Modelo Elastoplástico | 39 |
| 3.8 | Análise Incremental | 40 |
| 3.8.1 | Processo Iterativo - Método de Newton-Raphson..... | 41 |
| 3.8.2 | Organização do Sistema Governativo | 44 |

4 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1 | Considerações Iniciais..... | 47 |
| 4.2 | Transformações de Coordenadas | 48 |
| 4.3 | Definição da Aproximação | 49 |
| 4.4 | Controlo da Cedência | 51 |
| 4.4.1 | Controlo em Pontos de Colocação..... | 51 |
| 4.4.2 | Controle em Células Plásticas | 52 |
| 4.5 | Critérios de Cedência | 53 |
| 4.7.1 | Critério de von Mises | 54 |
| 4.7.2 | Critério de Mohr-Coulomb..... | 55 |
| 4.7.3 | Critério de Drucker-Prager | 56 |
| 4.6 | Cálculo dos Operadores Estruturais..... | 57 |
| 4.6.1 | Operador de Flexibilidade (F) | 57 |
| 4.6.2 | Operador de Compatibilidade no Domínio (A_v) | 57 |
| 4.6.3 | Operador de Compatibilidade na Fronteira (A_γ) | 59 |
| 4.6.4 | Cálculo do Operador (N_*) | 60 |
| 4.6.5 | Cálculo do Operador (H_*) | 61 |
| 4.6.6 | Cálculo do Operador (M_*) | 62 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 4.6.7 | Vector das Forças de Massa Generalizadas (Q_v) | 64 |
| 4.6.8 | Vector das Forças na Fronteira Generalizadas (Q_γ) | 65 |
| 4.7 | Cálculo dos Campos de Tensões e Deslocamentos..... | 65 |
| 4.8 | Algoritmo do Modelo Elastoplástico | 66 |
| 5 | EXEMPLOS DE APLICAÇÃO | |
| 5.1 | Considerações Iniciais | 71 |
| 5.2 | Análise Elástica de Lajes de Reissner-Mindlin | 72 |
| 5.2.1 | Análise de Laje Quadrada Simplesmente Apoiada | 74 |
| 5.2.2 | Análise de Laje Enviada | 76 |
| 5.2.3 | Análise ao Refinamento do Grau das Aproximações | 77 |
| 5.2.4 | Análise ao Refinamento da Malha..... | 81 |
| 5.2.5 | Análise ao Efeito de Locking | 86 |
| 5.2.6 | Análise de Sensibilidade à Distorção da Malha | 90 |
| 5.3 | Análise Elastoplástica de Placas | 93 |
| 5.3.1 | Análise das Técnicas de Controlo de Cedência | 94 |
| 5.3.2 | Implementação dos Critérios de Cedência Alternativos | 110 |
| 5.3.3 | Análise de Viga Bi-Encastrada | 114 |
| 6 | CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS | |
| 6.1 | Considerações Iniciais | 119 |
| 6.2 | Conclusões..... | 120 |
| 6.3 | Desenvolvimentos Futuros..... | 124 |

A FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE PLACA

| | | |
|-----|-----------------------------------|-----|
| A.1 | Considerações Iniciais..... | 125 |
| A.2 | Definição do Problema | 125 |
| A.3 | Relações de Equilíbrio | 127 |
| A.4 | Relações de Compatibilidade | 127 |
| A.5 | Relações de Elasticidade | 128 |

B FORMULAÇÃO DE LAJES DE REISSNER-MINDLIN

| | | |
|-----|-----------------------------------|-----|
| B.1 | Considerações Iniciais..... | 131 |
| B.2 | Definição do Problema | 131 |
| B.3 | Relações de Equilíbrio | 133 |
| B.4 | Relações de Compatibilidade | 134 |
| B.5 | Relações de Elasticidade | 136 |

C TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

| | | |
|-----|---|-----|
| C.1 | Considerações Iniciais..... | 139 |
| C.2 | Definição da Transformação de Coordenadas | 139 |
| C.3 | Definição do Jacobiano da Transformação de Coordenadas..... | 141 |
| C.4 | Transformação de Coordenadas Inversa | 142 |

D POLINÓMIOS DE LEGENDRE

| | | |
|-----|--|-----|
| D.1 | Considerações Iniciais..... | 145 |
| D.2 | Propriedades dos Polinómios de Legendre | 145 |
| D.3 | Fórmulas Geradoras de Polinómios de Legendre | 146 |
| | D.3.1 Fórmula Recursiva de Bonnet..... | 146 |
| D.4 | Expressões das Integrações Analíticas | 150 |

E CRITÉRIOS DE CEDÊNCIA

| | | |
|-----|----------------------------------|-----|
| E.1 | Considerações Iniciais | 153 |
| E.2 | Crítério de von Mises | 156 |
| E.3 | Crítério de Mohr-Coulomb | 156 |
| E.4 | Crítério de Drucker-Prager | 157 |

F APROXIMAÇÃO DOS INCREMENTOS DOS PARÂMETROS PLÁSTICOS

| | | |
|-----|------------------------------|-----|
| F.1 | Considerações Iniciais | 159 |
| F.2 | Aproximação Constante | 159 |
| F.3 | Aproximação Linear | 159 |
| F.4 | Aproximação Quadrática | 160 |

G PROGRAMA LAJE-POL

| | | |
|-------|---|-----|
| G.1 | Considerações Iniciais | 163 |
| G.2 | Cálculo dos Operadores Estruturais | 164 |
| G.2.1 | Operador de Flexibilidade (F) | 164 |
| G.2.2 | Operador de Compatibilidade no Domínio (A_v) | 164 |
| G.2.3 | Operador de Compatibilidade na Fronteira (A_γ) | 166 |
| G.2.4 | Vector das Forças de Massa | 168 |
| G.2.5 | Vector das Forças na Fronteira | 169 |

H PROGRAMA PLACA-LEG

| | | |
|-------|--|-----|
| H.1 | Considerações Iniciais | 171 |
| H.2 | Cálculo dos Operadores Estruturais | 171 |
| H.2.1 | Operador de Flexibilidade (F) | 171 |
| H.2.2 | Operador de Compatibilidade no Domínio (A_v) | 173 |

| | | |
|-------|--|-----|
| H.2.3 | Operador de Compatibilidade na Fronteira (\mathbf{A}_γ) | 175 |
| H.2.4 | Vector das Forças de Massa (\mathbf{Q}_v) | 177 |
| H.2.5 | Vector das Forças na Fronteira (\mathbf{Q}_γ) | 179 |

I FÓRMULAS E TEOREMAS MATEMÁTICOS

| | | |
|-------|---|-----|
| I.1 | Regras e Teoremas de Derivação e Integração | 181 |
| I.2 | Gradiente de um Campo Escalar..... | 182 |
| I.3 | Divergência de um Campo Vectorial | 182 |
| I.4 | Teorema da Divergência de Gauss | 183 |
| I.5 | Integração Numérica - Regras de Quadratura..... | 183 |
| I.5.1 | Pontos de Integração de Gauss..... | 183 |
| I.5.2 | Pontos de Integração de Lobatto | 184 |

| | |
|------------------|-----|
| REFERÊNCIAS..... | 185 |
|------------------|-----|

Índice de Figuras

Capítulo 2

| | |
|---|----|
| Figura 2-1: Abordagem geral utilizada na formulação do problema. | 8 |
| Figura 2-2: Notação base utilizada no trabalho | 9 |
| Figura 2-3: Estabilidade de um material de acordo com o Postulado de Drucker (adap. de [13]) | 14 |
| Figura 2-4: Ilustração do Postulado de Drucker..... | 15 |
| Figura 2-5: Convexidade da superfície de cedência e normalidade do escoamento plástico (adaptado de [13]) | 16 |
| Figura 2-6: Definição da condição de cedência..... | 17 |
| Figura 2-7: Leis de endurecimento mais utilizadas (adaptado de [10]) | 18 |
| Figura 2-8: Modelos de endurecimento linear - isotrópico vs cinemático | 19 |
| Figura 2-9: Definição de módulo de plasticidade..... | 20 |
| Figura 2-10: Situações possíveis de carregamento..... | 21 |
| Figura 2-11: Integração das relações constitutivas com base em valores no início e no final do passo de carga | 23 |
| Figura 2-12: Métodos de integração das relações constitutivas (adaptado de [18]) | 24 |

Capítulo 3

| | |
|--|----|
| Figura 3-1 Representação esquemática do método de Newton-Raphson e do método das perturbações..... | 41 |
| Figura 3-2 Discretização de uma estrutura tipo consola | 45 |

Capítulo 4

| | |
|--|----|
| Figura 4-1: Transformação de coordenadas para um elemento genérico trapezoidal de 4 nós..... | 48 |
| Figura 4-2: Funções de aproximação da geometria do elemento | 49 |
| Figura 4-3: Técnicas de controlo de cedência..... | 52 |

| | |
|--|----|
| Figura 4-4: Representação de uma célula plástica e de pontos de integração, nos diversos referenciais considerados | 53 |
| Figura 4-5: Problemas na definição das normais à superfície de cedência | 54 |
| Figura 4-6: Representação gráfica dos critérios de cedência (adaptado de [13] e [67]) | 56 |
| Figura 4-7: Comparação entre o critério de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager (adaptado de [13]) | 56 |
| Figura 4-8: Representação esquemática do método de Newton-Raphson e do método de Newton-Raphson modificado | 63 |
| Figura 4-9: Algoritmo do incremento de carga | 68 |
| Figura 4-10: Algoritmo do processo iterativo..... | 69 |

Capítulo 5

| | |
|---|----|
| Figura 5-1: Malhas utilizadas nas discretizações dos modelos | 73 |
| Figura 5-2: Definição das características da laje simplesmente apoiada..... | 74 |
| Figura 5-3: Campos de esforços e de deslocamentos - Laje simplesmente apoiada | 75 |
| Figura 5-4: Definição das características da laje enviesada | 76 |
| Figura 5-5: Campos de esforços e de deslocamentos - Laje enviesada..... | 78 |
| Figura 5-6: Representação gráfica das grandezas estruturais de comparação - Exemplo 3.. | 79 |
| Figura 5-7: Representação gráfica das funções de aproximação utilizadas | 80 |
| Figura 5-8: Representação gráfica das grandezas <i>cond_{est}</i> e <i>rcond</i> | 81 |
| Figura 5-9: Definição das características da laje - Análise ao refinamento da malha | 81 |
| Figura 5-10: Campos de esforços e de deslocamentos - Malha 4 e aproximação 3..... | 82 |
| Figura 5-11: Representação gráfica da evolução das grandezas (M_{xx}^A) , (w^D) e (U) , com o refinamento do número de elementos e da aproximação | 84 |
| Figura 5-12: Representação gráfica das grandezas estruturais - Corte A-A' (Aprox. 4). | 85 |
| Figura 5-13: Representação gráfica das grandezas estruturais - Corte A-A' (Aprox. 4a) | 87 |
| Figura 5-14: Definição das características da laje - Análise ao efeito de <i>locking</i> | 88 |
| Figura 5-15: Campos de esforços e de deslocamentos - Análise ao efeito de <i>locking</i> (t=0.01) | 89 |
| Figura 5-16: Representação gráfica da relação (\bar{w}/\bar{w}_{ref}) | 90 |

| | |
|---|-----|
| Figura 5-17: Definição das características laje - Sensibilidade à distorção da malha | 91 |
| Figura 5-18: Grandezas de comparação obtidas para diferentes níveis de distorção da malha..... | 92 |
| Figura 5-19: Definição das características da placa quadrada em consola..... | 94 |
| Figura 5-20: Resultados de um programa de elementos finitos tradicionais (adap. de [1])..... | 95 |
| Figura 5-21: Resultados obtido para o Modelo 4 - Fim da fase elástica, Activação do primeiro modo de cedência | 97 |
| Figura 5-22: Resultados obtidos para o Modelo 4 - ($\delta_f=10$) | 98 |
| Figura 5-23: Resultados obtidos para o Modelo 8 - ($\delta_f=10$) | 99 |
| Figura 5-24: Resultados obtidos para o Modelo 12 - ($\delta_f=10$) | 100 |
| Figura 5-25: Resultados obtidos para o Modelo 15 - ($\delta_f=10$) | 101 |
| Figura 5-26: Gráfico Carga-Deslocamento - Pontos de Colocação..... | 102 |
| Figura 5-27: Gráfico Carga-Deslocamento - Células Plásticas do tipo CEL1..... | 102 |
| Figura 5-28: Gráfico Carga-Deslocamento - Células Plásticas do tipo CEL4..... | 103 |
| Figura 5-29: Gráfico Carga-Deslocamento - Células Plásticas do tipo CEL9..... | 103 |
| Figura 5-30: Comparação do valor final do parâmetro de carga com o número de pontos de colocação ou células plásticas | 104 |
| Figura 5-31: Comparação do valor final do parâmetro de carga com o número total de modos de cedência..... | 105 |
| Figura 5-32: Representação dos campos de tensões ao longo de cortes - Modelo 4 ($\lambda=0.09$) | 106 |
| Figura 5-33: Representação dos campos de tensões ao longo de cortes - Modelo 4 ($\delta_f = 10$) | 107 |
| Figura 5-34: Resultados obtidos para o Modelo 18 - ($\delta_f=10$) | 109 |
| Figura 5-35: Gráfico Carga-Deslocamento - Técnicas Mistas..... | 110 |
| Figura 5-36: Evolução da activação dos modos de cedência - Modelo 18 | 111 |
| Figura 5-37: Resultados obtidos para o Modelo 25 - ($\delta_f=10$) | 112 |
| Figura 5-38: Evolução do parâmetro (λ_u) para os diferentes valores do ângulo de atrito..... | 113 |

| | |
|--|-----|
| Figura 5-39: Definição das características da Viga Bi-Encastrada..... | 114 |
| Figura 5-40: Resultados obtidos para o Modelo de Viga Bi-encastrada, ($\lambda=0.1756$) | 115 |
| Figura 5-41: Evolução da activação dos modos de cedência - Viga Bi-Encastrada..... | 116 |
| Figura 5-42: Representação dos campos de tensões ao longo do corte C-D,Viga Bi-Encastrada ($\lambda=0.1756$) | 117 |

Anexo A

| | |
|-------------------------------------|-----|
| Figura A-1: Elemento de placa | 126 |
|-------------------------------------|-----|

Anexo B

| | |
|---|-----|
| Figura B-1: Elemento de laje e sistema de eixos adoptado..... | 131 |
| Figura B-2: Forças de massa aplicadas ao elemento de laje | 132 |
| Figura B-3: Forças aplicadas na fronteira do elemento de laje | 132 |
| Figura B-4: Deformação por flexão e por corte da laje | 134 |

Anexo C

| | |
|--|-----|
| Figura C-1: Transformação de coordenadas de um elemento genérico trapezoidal de 4 nós..... | 140 |
| Figura C-2: Funções de aproximação da geometria do elemento | 140 |

Anexo D

| | |
|--|-----|
| Figura D-1: Representação gráfica dos polinómios de Legendre unidimensionais..... | 147 |
| Figura D-2: Representação gráfica dos polinómios de Legendre bidimensionais..... | 148 |
| Figura D-3: Representação gráfica dos polinómios de Legendre bidimensionais (cont.)..... | 149 |

Anexo E

| | |
|---|-----|
| Figura E-1: Significado físico e geométrico de (ξ, ρ, θ) e $(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta)$, adaptado de [10]..... | 155 |
|---|-----|

Anexo F

| | |
|---|-----|
| Figura F-1: Funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos. Aproximação Linear | 161 |
|---|-----|

| | |
|--|-----|
| Figura F-2: Funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos. Aproximação Quadrática | 161 |
|--|-----|

Anexo G

| | |
|---|-----|
| Figura G-1: Elemento Mestre utilizado no programa <i>Laje-Pol</i> | 166 |
|---|-----|

Anexo H

| | |
|--|-----|
| Figura H-1: Elemento Mestre utilizado no programa <i>Placa-Leg</i> | 169 |
|--|-----|

Índice de Quadros

Capítulo 3

| | |
|---|----|
| Quadro 3-1: Resumo das características dos modelos de elementos finitos | 32 |
|---|----|

Capítulo 5

| | |
|---|-----|
| Quadro 5-1: Aproximações utilizadas..... | 73 |
| Quadro 5-2: Resultados da análise da laje quadrada através do programa Laje-Pol | 74 |
| Quadro 5-3: Resultados da análise da laje enviesada através do programa Laje-Pol | 77 |
| Quadro 5-4: Resultados provenientes de outras formulações | 77 |
| Quadro 5-5: Resultados da análise ao refinamento do grau da aproximação através do programa <i>Laje-Pol</i> | 78 |
| Quadro 5-6: Valores das funções <i>condest</i> e <i>rcond</i> para matriz do sistema governativo..... | 80 |
| Quadro 5-7: Resultados da análise ao refinamento da malha através do programa <i>Laje-Pol</i> . | 83 |
| Quadro 5-8: Valores do deslocamento transversal em função da espessura da laje - Ponto A..... | 90 |
| Quadro 5-9: Grandezas estruturais obtidas para diferentes níveis de distorção da malha | 91 |
| Quadro 5-10: Características dos modelos analisados - Controlo da cedência | 95 |
| Quadro 5-11: Valores finais para o parâmetro de carga (λ) - Modelos 1 a 16..... | 96 |
| Quadro 5-12: Características dos modelos analisados com a <i>Técnica Mista</i> | 108 |
| Quadro 5-13: Valores finais para o parâmetro de carga (λ) - <i>Técnica Mista</i> | 108 |
| Quadro 5-14: Valores finais para o parâmetro de carga (λ) - Critério de Drucker-Prager | 113 |

Anexo H

| | |
|---|-----|
| Quadro H-1: Ordenamento dos termos de um bloco do operador de flexibilidade (F) | 172 |
| Quadro H-2: Ordenamento dos termos de um bloco do operador (A_v) | 175 |
| Quadro H-3: Ordenamento dos termos de um bloco do operador (A_γ) | 177 |

Quadro H-4: Ordenamento dos termos do vector das forças de massa (\mathbf{Q}_v) 178

Quadro H-5: Ordenamento dos termos do vector das forças de fronteira (\mathbf{Q}_γ) 180

Anexo I

Quadro I-1: Pontos de integração de Gauss 183

Quadro I-2: Pontos de integração de Gauss (continuação) 184

Quadro I-3: Pontos de integração de Lobatto 184

Notação

Notação Base:

G_j^i - Valor da grandeza (G), na iteração (i), do passo de carga (j).

Letras Latinas Minúsculas:

- b - Forças de massa.
- c - Coesão.
- e - Deformações generalizadas.
- e_e - Deformações elásticas generalizadas.
- e_p - Deformações plásticas generalizadas.
- f - Matriz que reúne os parâmetros elásticos - formato de flexibilidade.
- f - Função de cedência.
- g - Função de potencial plástico.
- h_* - Derivada da função de cedência em ordem aos parâmetros de endurecimento.
- k - Matriz que reúne os parâmetros elásticos - formato de rigidez ou Constante do material associada ao critério de Drucker-Prager.
- k_τ - Tensão de cedência num estado de corte puro.
- n - Normal exterior unitária à fronteira.
- n_* - Normal exterior à função de cedência ($\phi = 0$).
- q_v - Pesos da aproximação dos deslocamentos generalizados no domínio.
- q_γ - Pesos da aproximação dos deslocamentos generalizados na fronteira.
- s - Esforços independentes.
- t_γ - Forças na fronteira.
- u_v - Campos de deslocamentos no domínio do elemento.
- u_p - Solução particular para o campo de deslocamentos generalizados.
- u_γ - Campos de deslocamentos generalizados na fronteira do elemento.

Letras Latinas Maiúsculas:

- A_v - Operador de compatibilidade no domínio.
- A_γ - Operador de compatibilidade na fronteira.
- D - Operador diferencial de equilíbrio.
- D^* - Operador diferencial de compatibilidade.
- E - Módulo de elasticidade.
- E_t - Módulo elastoplástico.
- F - Operador de flexibilidade generalizada.
- H' - Módulo de plasticidade.
- H - Matriz Hessiana.
- H_* - Operador de endurecimento generalizado.
- I_1 - Primeiro invariante do tensor das tensões.
- J_2 - Segundo invariante do tensor das tensões deviatóricas.
- J_3 - Terceiro invariante do tensor das tensões deviatóricas.

- M_* - Operador associado à matriz Hessiana.
- N - Matriz das normais exteriores à fronteira.
- N_* - Operador das normais à função de cedência.
- P_* - Funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos.
- Q_v - Forças de massa generalizadas.
- Q_γ - Forças na fronteira generalizadas.
- S_v - Funções de aproximação dos campos de tensões/esforços.
- U_v - Funções de aproximação dos campos de deslocamentos na domínio do elemento.
- U_γ - Funções de aproximação dos campos de deslocamentos na fronteira do elemento.
- V - Domínio do elemento.
- W - Trabalho.
- W' - Peso de um ponto associado ao método da quadratura de Gauss ou de Lobatto.
- X - Pesos da aproximação dos campos de tensões/esforços generalizados.

Letras Gregas Minúsculas:

- α - Constante do material associada ao critério de Drucker-Prager ou factor de corte em lajes espessas.
- β - Parâmetro de endurecimento.
- ε_{ij} - Tensor das deformações.
- ε_j - Vector das deformações independentes.
- γ - Distorção.
- ε_t - Deformações totais.
- ε_e - Deformações elásticas.
- ε_p - Deformações plásticas.
- ε_θ - Campo de deformações instalado, antes de se iniciar o carregamento.
- ε_p^{ef} - Deformação plástica efectiva.
- ε_* - Parâmetro plástico.
- ϕ - Ângulo de atrito interno.
- ϕ_* - Função dos potenciais plásticos.
- κ - Parâmetro de endurecimento.
- ψ - Função de aproximação.
- ν - Coeficiente de Poisson.
- ξ - Componente hidrostática do estado de tensão.
- ρ - Componente deviatória do estado de tensão.
- θ - Ângulo de Lode.
- σ_j - Vector das tensões independentes.
- σ_0 - Parâmetro que caracteriza a envolvente de cedência do material.
- σ_{ij} - Tensor das tensões.
- σ_p - Campo de tensões instalado, antes de se iniciar o carregamento.
- σ_{ced} - Tensão de cedência.
- σ^{ef} - Tensão efectiva.
- $\hat{\sigma}$ - Tensão de comparação.
- σ_m - Tensão normal média.

- σ_{oct} - Tensões normal octaédrica.
 τ_m - Tensão tangencial média.
 τ_{oct} - Tensões tangencial octaédrica.
 τ_* - Tempo convencional de plasticidade.

Letras Gregas Maiúsculas:

- $\Delta \varepsilon_*$ - Vector dos incrementos do parâmetros plásticos.
 Δe_* - Vector dos incrementos do parâmetros plásticos generalizados.
 Φ_* - Potenciais plásticos generalizados.
 Γ - Fronteira do elemento.
 Γ_σ - Fronteira estática do elemento.
 Γ_u - Fronteira cinemática do elemento.

Abreviaturas

- MEF - Método dos elementos finitos.
HMT - Híbridos-Mistos de tensão.
ICIST- Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção.
LNEC - Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
EPT - Estados planos de tensão.
EPD - Estados planos de deformação.

Capítulo 1

Introdução

1.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nos últimos tempos, os engenheiros foram confrontados com problemas cada vez mais complexos no domínio da análise estruturas. Rapidamente perceberam que a obtenção de soluções exactas era extremamente difícil e em alguns casos impossível, levando a que tivessem que recorrer a modelos numéricos e frequentemente trabalhar com soluções aproximadas. Foram desenvolvidos muitos métodos de análise, entre os quais se destacam os métodos variacionais [48, 53], o método das diferenças finitas [31, 52, 56], o método dos resíduos pesados [24, 25] e o método dos elementos finitos (MEF) [5, 17, 26, 61], que é claramente o mais utilizado.

O sucesso do MEF deve-se essencialmente à forma como é abordado o problema, o que lhe permite apresentar algumas vantagens sobre as restantes ferramentas de análise. Entre essas vantagens, encontra-se o facto de recorrer à técnica de dividir o problema complexo num conjunto discreto de sub-regiões, que se dominam por *elementos finitos*. A formulação é então desenvolvida ao nível do elemento de forma a englobar as condições necessárias à modelação do problema em estudo. É também nos elementos que é efectuada a aproximação das grandezas contínuas, recorrendo-se usualmente a uma combinação linear de um conjunto discreto de funções, ficando o problema restringido a um número finito de variáveis. Por último, o sistema de equações governativas é em geral estabelecido de forma ponderada, recorrendo

ao método dos resíduos pesados. Este procedimento permite efectuar uma abordagem simples, bem estruturada, matematicamente bem fundamentada e ao mesmo tempo obter bons resultados.

O MEF encontra-se muito desenvolvido abrangendo vários domínios da engenharia e apresentando inúmeras variantes. No domínio da Mecânica dos Sólidos, o modelo de compatibilidade é de longe o mais utilizado. O sucesso deste modelo deve-se essencialmente à sua simplicidade, e ao facto da sua formulação ser menos exigente e mais intuitiva que as formulações alternativas.

São aproximadas as grandezas associadas ao campo cinemático. As funções de aproximação são escolhidas de forma a que sejam verificadas localmente todas as condições de compatibilidade. As soluções obtidas não satisfazem as relações de equilíbrio, quer no domínio, quer na fronteira dos elementos (a menos que se trate da solução exacta), pois toda a formulação é desenvolvida deixando para segundo plano o campo estático, sendo este obtido apenas de forma indirecta do campo cinemático.

A qualidade da solução pode geralmente ser melhorada através do sucessivo refinamento da malha, quer através do aumento do grau das funções de aproximação (refinamento tipo p), quer através do aumento do número de elementos considerados na discretização (refinamento tipo h), sendo este último tipo mais utilizado nestes modelos.

As zonas a refinar estão geralmente associadas a locais onde existem grandes variações dos campos estático e/ou cinemático. Estas variações podem ser provocadas por inúmeras razões, entre as quais se destacam situações de variação de geometria e de existência de condições particulares de apoio e de cargas aplicadas.

Embora muito intuitivos e com uma fundamentação matemática robusta, as formulações clássicas do método dos elementos finitos, apresentam alguns inconvenientes, entre os quais se destacam os seguintes:

- i) A obtenção de uma solução de qualidade requer, regra geral, a consideração de um elevado número de elementos na malha. Este facto torna indispensável o desenvolvimento e aplicação de técnicas para a geração automática de malhas. Estas técnicas podem ser bastante sofisticadas e de difícil implementação e controlo, sobretudo se se tratarem de problemas com geometria tridimensional.
- ii) Há uma grande relação de dependência entre a malha de elementos finitos considerada e a carga aplicada, o que leva a que a consideração de carregamentos diferentes possa implicar a utilização de malhas também diferentes.

iii) As soluções obtidas com recurso a estes modelos estão contra a segurança, uma vez que não satisfazem as condições de equilíbrio, quer no domínio, quer na fronteira dos elementos.

iv) Há dificuldade em desenvolver e implementar modelos para a análise de fenómenos de fendilhação, tendo em conta que o aparecimento e a evolução de fendas, introduz uma descontinuidade local no campo de deslocamentos. Desta forma, a continuidade no campo de deslocamentos imposta pela adopção de modelos de compatibilidade dificulta o tratamento natural deste tipo de fenómenos [10].

Foi para tentar contornar estas limitações, que se têm desenvolvido formulações alternativas para o método dos elementos finitos [20].

A utilização de modelos que tratem de forma mais rigorosa as relações de equilíbrio, permite alimentar maiores expectativas na qualidade da solução final, especialmente quando se trata de análises fisicamente não lineares, as quais evoluem de acordo com informação fornecida pelo campo estático. Entre estes modelos encontra-se o modelo híbrido-misto de tensão (HMT), utilizado neste trabalho [10, 20, 39].

O relativo insucesso que as formulações alternativas têm tido, pode encontrar justificação em várias razões. Em primeiro lugar estas formulações são menos intuitivas, essencialmente devido à perda do significado físico das variáveis intervenientes, provocado pelo abandono do conceito de interpolação nodal. Estão ainda associadas a um grande aumento na complexidade do modelo e na quantidade de cálculos a efectuar, a que nem sempre corresponde um acréscimo visível de qualidade na solução.

O crescente desenvolvimento que nos últimos tempos se tem registado no ramo da informática, veio criar mais expectativas no futuro destes modelos mais exigentes e complexos, levando a que este trabalho de implementação, consolidação e validação dos modelos HMT na análise elastoplástica, surgisse com alguma naturalidade e pertinência.

1.2 - OBJECTIVOS

O objectivo principal deste trabalho reside no desenvolvimento de um modelo híbrido-misto de tensão para a análise elastoplástica de estruturas bidimensionais planas, nomeadamente placas (EPT e EPD) e lajes.

Pretende desenvolver-se um modelo HMT, que incorpore as seguintes características:

1. Utilização do método de Newton-Raphson na resolução do sistema de equações não lineares.

2. Incorporação de critérios de cedência adaptados à modelação de materiais com resistência combinada de atrito e coesão.
3. Implementação e estudo de diferentes técnicas para o controlo da cedência, nomeadamente o controlo com base em células e com base em pontos de colocação.

Salienta-se que embora algumas destas características já tenham sido implementadas em outros trabalhos [8, 10, 33, 65], um modelo HMT que satisfizesse todos os requisitos anteriores, não tinha ainda sido desenvolvido no âmbito do grupo de investigação onde este trabalho se enquadra.

1.3 - METODOLOGIA

Nos modelos HMT aqui apresentados, os campos de tensões e de deslocamentos no domínio dos elementos são aproximados em simultâneo e de forma independente. Também o campo de deslocamentos ao longo da fronteira estática é modelado de forma independente. Neste tipo de modelo, considera-se que a fronteira estática inclui os troços onde se impõe as tensões aplicadas, e ainda, as fronteiras inter-elementares.

A formulação do modelo de elementos finitos é desenvolvida através dos princípios fundamentais da mecânica [10], tendo-se utilizado considerações energéticas apenas para assegurar a consistência das variáveis discretas.

Para o comportamento em fase elástica do material, adoptou-se um modelo isotrópico elástico e linear, enquanto que na fase plástica se utilizou uma lei de escoamento associada. Considerou-se como válido o postulado de Drucker e efectuou-se a integração das relações constitutivas recorrendo ao método implícito de Euler.

Para se modelarem os fenómenos associados à plasticidade, cada elemento finito é subdividido num conjunto de células plásticas onde se aproxima a distribuição dos incrementos dos parâmetros plásticos. Esta aproximação pode ser obtida com recurso à utilização de um conjunto completo de funções polinomiais, que devem possuir valores não negativos em todo o seu intervalo de definição. Utilizando-se esta opção, o controlo da plasticidade é efectuado com base nos conceitos de célula plástica e no modo de plastificação.

A técnica de controlo baseada na consideração de pontos de colocação (usualmente coincidentes com os pontos de integração) pode ser de imediato recuperada se se considerarem funções de Dirac na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos [8, 33].

No modelo HMT, as condições de fronteira cinemática e a condição de escoamento plástico são verificadas *a priori*. As restantes condições são impostas de forma ponderada, na forma de resíduos pesados. A ponderação é efectuada de forma a garantir que no modelo discreto se preserve a dualidade estática-cinemática, a reciprocidade elástica e a plasticidade associada.

O sistema governativo é obtido através da combinação das condições de equilíbrio, compatibilidade, elasticidade e plasticidade.

Para que houvesse um maior controlo sobre o modelo, optou-se por desenvolver de raiz os programas de cálculo, em detrimento da adaptação de ferramentas ou rotinas já existentes.

1.4 - FASEAMENTO

Numa primeira fase foi desenvolvido e implementado um modelo HMT para a análise elástica linear de lajes de Reissner-Mindlin. Este programa, aqui designado genericamente por *Laje-Pol*, foi desenvolvido no ambiente de programação Matlab [34] e utiliza polinómios como funções de aproximação. Embora apresente um fraco desempenho numérico, o seu desenvolvimento teve aspectos muito benéficos a nível pedagógico para a dissertação.

Numa segunda fase foi desenvolvido um modelo HMT para a análise elastoplástica de placas. Neste modelo foram utilizados na definição das aproximações, polinómios ortogonais de Legendre. O programa resultante, aqui designado por *Placa-Leg*, incorpora todas as características associadas aos objectivos do trabalho.

1.5 - ORGANIZAÇÃO

O trabalho encontra-se dividido em 6 capítulos e em 9 anexos, entre os quais se encontra este primeiro capítulo de introdução.

O segundo capítulo tem como objectivo formular o problema que vai ser estudado, definindo-se as relações fundamentais, bem como as hipóteses e as notações adoptadas. É dada especial atenção ao modelo elastoplástico.

No terceiro capítulo é introduzido o modelo de elementos finitos utilizado na resolução do problema formulado no segundo capítulo. Inicialmente, são apresentadas de forma sucinta as principais formulações de elementos finitos existentes. Posteriormente, é definido com maior rigor o modelo híbrido-misto de tensão (HMT). Mais uma vez, especial atenção será dedicada ao comportamento em regime elastoplástico e aos aspectos relacionados com a análise incremental e com as técnicas iterativas.

No quarto capítulo apresentam-se os conceitos e as expressões relevantes à implementação numérica do modelo de elementos finitos discutido no terceiro capítulo. Definem-se as expressões utilizadas nas transformações de coordenadas, a forma como são definidas as aproximações e as técnicas implementadas para o controlo da cedência. Apresentam-se também, as expressões utilizadas no cálculo dos operadores estruturais presentes no sistema governativo não-linear, bem como os critérios de cedência implementados. Por fim, apresentam-se esquematicamente os algoritmos associados à implementação do modelo elastoplástico.

No quinto capítulo é ilustrada, através de exemplos, a aplicação dos modelos numéricos desenvolvidos. A validação e a caracterização do desempenho são efectuadas recorrendo a problemas para os quais se conhece uma solução analítica ou se conhecem os resultados provenientes da aplicação de outras técnicas numéricas.

No sexto e último capítulo são apresentadas as conclusões finais, e são identificados os possíveis desenvolvimentos futuros para este trabalho.

O presente texto é complementado com um conjunto de anexos, englobando aspectos que, quer pelo seu carácter de pormenor, quer por razões de fluidez de raciocínio, se considerou ser mais adequado serem colocados fora do corpo principal do texto. Os anexos englobam a definição da formulação de placa (EPT e EPD) e de laje de Reissner-Mindlin, os aspectos relacionados com as transformações de coordenadas, a definição dos polinómios de Legendre e dos critérios de cedência. São ainda apresentados dois anexos, onde se definem as expressões associadas aos dois programas desenvolvidos, e um terceiro, onde se apresenta de forma sucinta, o conjunto de conceitos e expressões matemáticas utilizadas como base deste trabalho.

Capítulo 2

Formulação do Problema

2.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo tem como objectivo introduzir as relações fundamentais utilizadas para definir o comportamento global do problema que se pretende estudar.

A estrutura do capítulo engloba uma fase inicial onde se apresenta a notação, as hipóteses base e as grandezas intervenientes, e uma fase posterior, onde se definem as relações fundamentais que permitem relacionar a evolução dessas grandezas.

É dada especial atenção ao modelo utilizado para o comportamento do material em fase plástica, visto a sua definição ter especial importância nas análises elastoplásticas. Algumas relações são introduzidas com uma fundamentação mais pormenorizada, com o intuito de transmitir ao leitor os conceitos fundamentais que justificaram a sua implementação no modelo.

Toda a formulação é apresentada na sua forma mais geral, de modo a que não esteja restringida a qualquer tipo de estrutura. Em contrapartida, nos anexos é particularizada para os problemas específicos implementados, nomeadamente para estruturas laminares planas (placas e lajes espessas).

HIPÓTESES BASE:

Ao longo deste trabalho consideraram-se as seguintes hipóteses base:

1. *Isotropia* - o material apresenta inicialmente o mesmo comportamento em todas as direcções.
2. *Linearidade geométrica* - os deslocamentos são pequenos e desprezáveis face às dimensões da peça. Desta forma a configuração deformada confunde-se com a sua configuração inicial.
3. *Não linearidade física* - o material apresenta comportamento elastoplástico, sendo a fase elástica linear.
4. O carregamento é *monotónico*, não havendo inversão do sentido de aplicação da carga.
5. A velocidade de aplicação da carga é suficientemente baixa para que se possam desprezar os seus efeitos dinâmicos.
6. A *temperatura* não interfere nas características mecânicas do material.

GRANDEZAS INTERVENIENTES:

As principais grandezas intervenientes são as forças aplicadas e as tensões, definindo o campo estático, bem como as deformações e os deslocamentos, associadas ao campo cinemático. Estas grandezas relacionam-se através das relações de equilíbrio, constitutivas e de compatibilidade, conforme indicado na Figura 2-1.

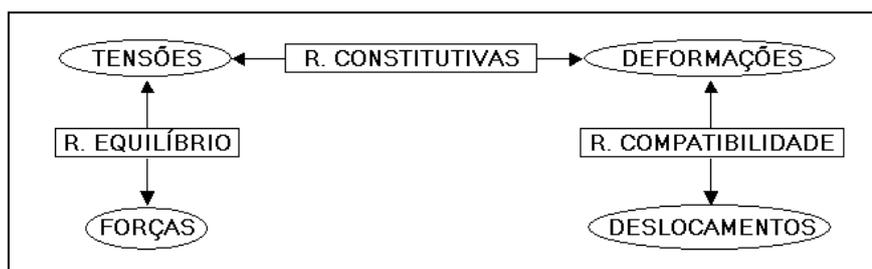


Figura 2-1: Abordagem geral utilizada na formulação do problema.

NOTAÇÃO BASE:

Um elemento genérico é definido num referencial cartesiano por um domínio (V) , delimitado pela fronteira (Γ) , sujeito a forças de massa (b) e a forças aplicadas na fronteira (t_γ) . Considera-se a fronteira cinemática (Γ_u) e a fronteira estática (Γ_σ) , como as regiões da

fronteira onde são conhecidos respectivamente os deslocamentos e as tensões aplicadas, (Figura 2-2).

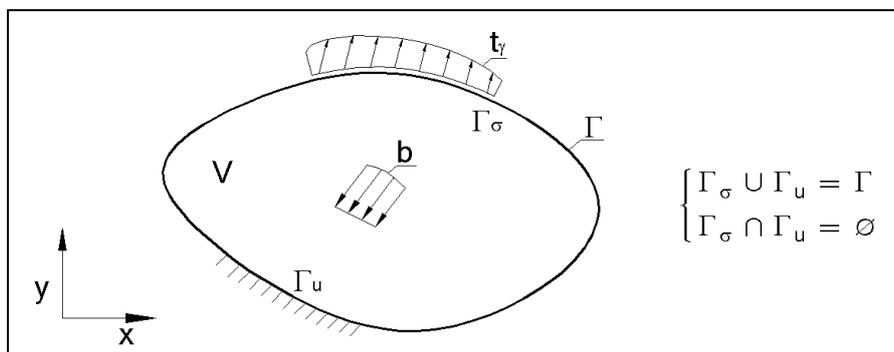


Figura 2-2: Notação base utilizada no trabalho.

2.2 - RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As relações de equilíbrio permitem relacionar as tensões/esforços com o carregamento aplicado ao corpo.

Considere-se um corpo, sujeito a um campo de forças de massa (b), e actuado por um conjunto de forças na fronteira (t_γ), representadas por vectores constituídos pelas suas componentes cartesianas:

$$b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad (2.1); \quad t_\gamma = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

O estado de tensão num ponto do corpo é caracterizado por um tensor cartesiano de segunda ordem, designado por *tensor das tensões*:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

onde a componente (σ_{ij}) representa a tensão aplicada segundo a direcção (j), numa faceta perpendicular à direcção (i). Tendo em conta as hipóteses base consideradas, este tensor é simétrico, o que permite definir o estado de tensão num ponto através do vector onde se incluem as componentes independentes deste tensor,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A condição de equilíbrio no domínio pode ser obtida impondo o equilíbrio de um volume infinitesimal, obtendo-se [4, 58]:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0. \quad (2.5)$$

A condição de equilíbrio na fronteira estática impõe que o campo de tensões esteja em equilíbrio com as tensões exteriores aplicadas. Recorrendo à *fórmula de Cauchy*, obtém-se [4, 58]:

$$\sigma_{ij} n_i = t_{\gamma j}, \quad (2.6)$$

onde (n_i) representa a componente da normal exterior unitária à fronteira, segundo a direcção (i).

As equações (2.5) e (2.6) podem ser escritas na forma matricial, por:

$$D \sigma + b = 0 \text{ em } V, \quad (2.7)$$

$$N \sigma = t_{\gamma} \text{ em } \Gamma_{\sigma}, \quad (2.8)$$

onde (D) e (N) representam respectivamente o *operador diferencial de equilíbrio* e a matriz que reúne as componentes da *normal exterior unitária* à fronteira estática, definidos por:

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

2.3 - RELAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

As condições de compatibilidade permitem relacionar o campo de deslocamentos com o campo de deformações.

O deslocamento de cada ponto do corpo pode ser definido recorrendo a um vector (u), constituído pelas suas componentes cartesianas:

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

O estado de deformação de um ponto do corpo é caracterizado por um tensor cartesiano simétrico de segunda ordem, designado por *tensor das deformações*:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde as componentes (ε_{ij}) representam a extensão linear de uma fibra infinitesimal que antes da deformação é paralela ao eixo (i), e as restantes componentes do tensor (ε_{ij}), representam metade da variação do ângulo formado por duas fibras infinitesimais, inicialmente dispostas segundo as direcções (i) e (j). Ao valor total dessa variação é usual chamar-se *distorção*, a qual é definida pela igualdade:

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}. \quad (2.13)$$

As componentes independentes do tensor das deformações podem ser agrupadas no vector:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

As condições de compatibilidade no domínio podem ser expressas na forma [58]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.15)$$

Os deslocamentos impostos ao longo da fronteira cinemática dão origem à condição de compatibilidade na fronteira:

$$u_i = u_{,i}, \quad (2.16)$$

onde o índice (i) representa a direcção considerada.

As relações anteriores podem ser escritas na forma matricial:

$$\varepsilon = D^* u \text{ em } V, \quad (2.17)$$

$$u = u_{,\gamma} \text{ em } \Gamma_u. \quad (2.18)$$

Admitindo a linearidade geométrica, os operadores (D^*) e (D) são lineares e adjuntos, representando (2.7) e (2.17) transformações conjugadas [10]. Tratando-se de operadores diferenciais de 1ª ordem, verifica-se a relação $(D^* = D^t)$.

2.4 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As relações constitutivas permitem relacionar as tensões (campo estático) com as deformações (campo cinemático).

Considerando materiais com comportamento elastoplástico, as relações constitutivas apresentam um primeiro troço elástico, onde a deformação total (ε_t) é elástica e portanto reversível (ε_e) , e um segundo troço elastoplástico, caracterizado pelo aparecimento de deformações plásticas irreversíveis (ε_p) . Pode então escrever-se:

$$\text{Troço elástico:} \quad \varepsilon_t = \varepsilon_e, \quad (2.19)$$

$$\text{Troço elastoplástico:} \quad \varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (2.20)$$

A decomposição das deformações totais numa parcela elástica e numa outra plástica, é uma das características da definição cinemática da plasticidade [2]. Este tipo de formulação ajusta-se bem ao modelo de elementos finitos utilizado, o qual utiliza uma formulação de flexibilidade para as relações constitutivas elásticas.

2.4.1 - FASE ELÁSTICA

Na fase elástica, a relação constitutiva do material é do tipo linear, podendo ser definida no formato de flexibilidade (2.21), ou no formato de rigidez (2.22) [4]:

$$\varepsilon = f \sigma + \varepsilon_0, \quad (2.21)$$

$$\sigma = k \varepsilon + \sigma_p. \quad (2.22)$$

Nas equações anteriores, (ε_0) e (σ_p) representam respectivamente os campos de deformações e as tensões instalados antes de se iniciar o carregamento, podendo ser utilizados para permitir a consideração de *deformações térmicas e tensões residuais*.

As matrizes (f) e (k) reúnem os parâmetros elásticos do material. Tendo em conta as hipóteses de base consideradas, estas matrizes são simétricas e positivas definidas, podendo ser escritas na forma:

$$f = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$k = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde (E) representa o *módulo de elasticidade* e (ν) o *coeficiente de Poisson*.

2.4.2 - FASE PLÁSTICA

De seguida apresenta-se a formulação adoptada para o comportamento de material em fase plástica. Procurou-se apresentar com maior pormenor as hipóteses de base consideradas, bem como as suas consequências no desenvolvimento da formulação. Informações mais detalhadas sobre estes assuntos podem ser encontradas nos trabalhos de Chen [13], Kachanov [29] e Zienkiewicz et al. [67].

Para caracterizar o comportamento do material em fase plástica é necessário definir:

1. A *Condição de Cedência*, a qual permite definir o limite a partir do qual se iniciam as deformações plásticas irreversíveis.
2. A *Lei de Endurecimento*, que permite definir a evolução da superfície de cedência ao longo do processo de deformação.
3. A *Lei de Escoamento*, que permite definir a direcção e o sentido do incremento da deformação plástica.
4. A *Condição de Consistência*, que permite definir os incrementos dos potenciais plásticos e da deformação plástica, para que não se viole a condição de cedência e a lei de endurecimento.
5. As *Condições de Complementaridade*, as quais permitem relacionar a evolução do campo estático e do campo cinemático plástico.

HIPÓTESES BASE:

Neste trabalho considerou-se uma *lei de escoamento associada*, o que significa que se utilizou a mesma função para definir a cedência e os potenciais plásticos. No entanto, para que a formulação seja mais geral, é desenvolvida fazendo a distinção entre estas duas funções.

A hipótese da lei de escoamento associada é frequentemente adoptada nos trabalhos do domínio da plasticidade [8, 10, 33]. No entanto, alguns autores consideram-na inadequada para simular o comportamento de materiais não metálicos, como o betão e alguns solos [13], que saem fora do âmbito deste trabalho.

Considerou-se também como válido o *Postulado de Drucker*, também conhecido como *critério de estabilidade do material* [10, 13]. Este critério estabelece que "*para que um material seja estável, o trabalho realizado pelas deformações plásticas, durante um ciclo fechado de tensões é sempre não negativo*".

Para ilustrar a distinção que este critério faz em relação à estabilidade dos materiais, considere-se um material elastoplástico com um troço de endurecimento linear. Este material foi sujeito ao ciclo fechado de tensões ABCD, representado na Figura 2.3 a). A parcela elástica da energia de deformação é recuperada, dando origem a um trabalho nulo, enquanto que a parcela relacionada com as deformações plásticas produz um trabalho positivo (área a tracejado), tendo em conta que um incremento de tensão positivo ($d\sigma > 0$), dá origem a incrementos de deformações plásticas também positivas ($d\varepsilon^P > 0$). Assim sendo, de acordo com o postulado de Drucker este material apresenta um comportamento estável.

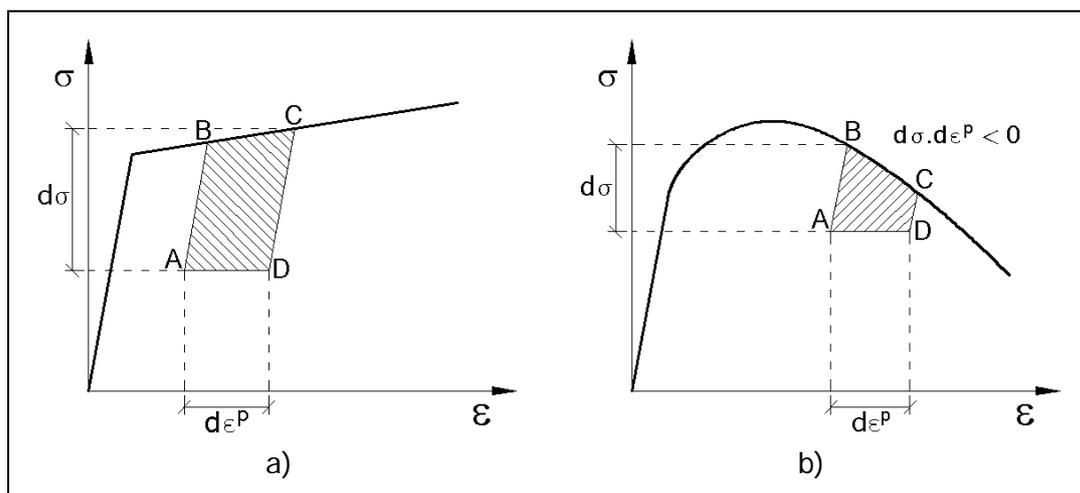


Figura 2-3: Estabilidade de um material de acordo com o Postulado de Drucker (adap. de [13]).

Na Figura 2.3 b) encontra-se representado um material com comportamento semelhante ao do amolecimento do betão. Neste caso, o trabalho produzido no troço descendente do diagrama

(ciclo de tensões ABCD), resulta do incremento das deformações plásticas e do decréscimo das tensões instaladas, dando origem a um trabalho negativo (área a tracejado) e a um material com comportamento não estável.

A consideração do postulado de Drucker tem importantes consequências no modelo de plasticidade adoptado. Para fundamentar a sua introdução na formulação, considere-se sem perda de generalidade, um material com comportamento elastoplástico perfeito, sujeito a uma força exterior que aumenta a tensão num ponto do elemento, do seu valor inicial (σ_{ij}^i), para um valor final (σ_{ij}^f) sobre a superfície de cedência (troço ABC). Suponha-se agora que se mantém este valor de tensão durante o tempo suficiente para que se dê alguma deformação plástica. Posteriormente dá-se uma descarga, levando o valor da tensão instalada novamente para (σ_{ij}^i) (troço CDA), gerando um ciclo de tensões fechado, conforme indicado na Figura 2-4.

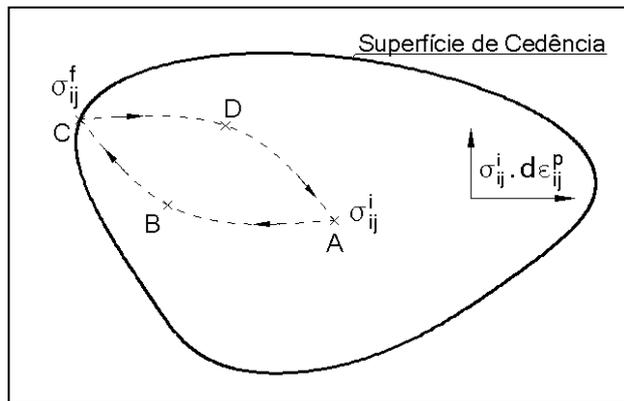


Figura 2-4: Ilustração do Postulado de Drucker.

Nesta situação, o trabalho realizado (dW) é definido pelo produto interno do vector do incremento das tensões pelo vector do incremento das deformações plásticas:

$$dW = d\sigma_{ij}^f \cdot d\epsilon_{ij}^p \quad (2.25)$$

Na hipótese da lei de escoamento associada, a sobreposição entre o espaço das deformações plásticas e o espaço das tensões indicada na Figura 2-4, permite estabelecer as seguintes interpretações geométricas:

Para que o produto interno definido em (2.25) tome um valor não negativo, é necessário que o ângulo formado pelo vector ($\sigma_{ij}^f - \sigma_{ij}^i$) e pelo vector ($d\epsilon_{ij}^p$), não seja obtuso.

Caso a superfície de cedência não seja convexa, é sempre possível encontrar uma configuração entre estes vectores que forme um ângulo obtuso, tal como se ilustra na Figura 2-5 a).

Da mesma forma, para uma superfície de cedência convexa e suave na vizinhança de um ponto A, é igualmente possível encontrar vectores que formem um ângulo obtuso, se o vector das deformações plásticas não for normal à superfície de cedência nesse ponto, conforme se exemplifica na Figura 2-5 b).

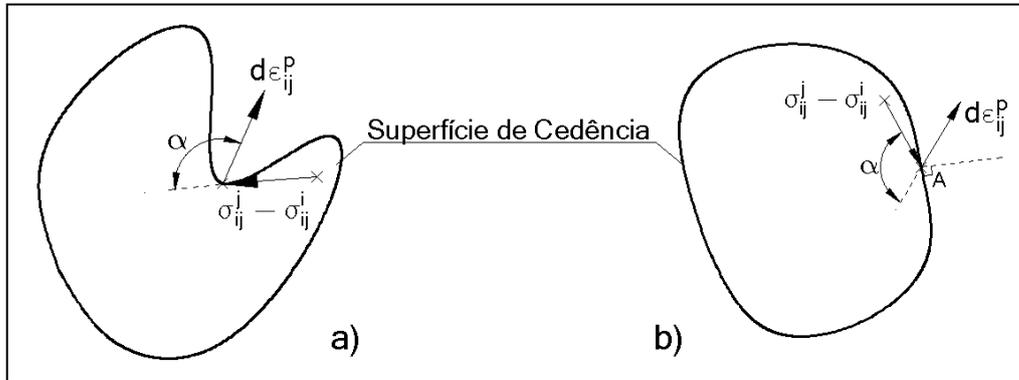


Figura 2-5: Convexidade da superfície de cedência e normalidade do escoamento plástico (adaptado de [13]).

Assim sendo, o postulado de Drucker tem como principais consequências assegurar que:

1. As superfícies de cedência são convexas.
2. O vector dos incrementos das deformações plásticas é normal à superfície de cedência.

CONDIÇÃO DE CEDÊNCIA:

A condição de cedência permite definir o limite a partir do qual se iniciam as deformações plásticas. Matematicamente, materializa-se na denominada *função de cedência* (f):

$$f(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma} - \sigma_0, \quad (2.26)$$

onde $(\hat{\sigma})$ representa a *tensão de comparação* associada à condição de cedência e (σ_0) representa um parâmetro, ou um conjunto de parâmetros, que caracterizam a envolvente de cedência do material (ex. tensão de cedência à tracção ou ao corte, ângulo de atrito interno, coesão), usualmente determinados experimentalmente.

A função de cedência toma valores negativos quando o material se encontra em regime elástico e valor nulo quando o material se encontra em cedência. Valores positivos representam um domínio inacessível para o material (Figura 2-6).

No caso de se considerar o endurecimento, a superfície de cedência sofre alterações durante o processo de deformação. A condição de cedência assim definida terá apenas validade no início do processo de deformação plástica, pois a parcela (σ_0) irá depender das deformações plásticas a que o material tenha sido submetido.

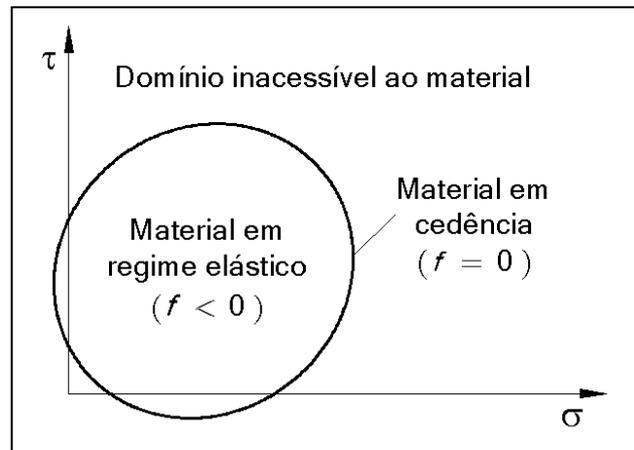


Figura 2-6: Definição da condição de cedência.

A condição de cedência fica definida, impondo que a função de cedência tome valores não positivos:

$$f \leq 0, \quad (2.27)$$

LEI DE ESCOAMENTO:

A lei de escoamento define a direcção e o sentido do incremento de deformação plástica, não fornecendo no entanto qualquer indicação sobre a sua intensidade.

A lei de escoamento define-se como:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_* \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.28)$$

pelo que a direcção do incremento das deformações plásticas é normal à superfície associada ao potencial plástico (g), definida por ($g = 0$). Por esta razão, a lei de escoamento é muitas vezes denominada por *condição de normalidade*.

A variável escalar (ε_*) determina a intensidade do incremento. Devido à obrigatoriedade do incremento da deformação plástica ser sempre não negativo, também (ε_*) terá de tomar valores não negativos, definindo-se desta a forma a *condição de escoamento plástico*:

$$d\varepsilon_* \geq 0. \quad (2.29)$$

Para assegurar ainda a verificação do postulado de Drucker, o sentido do incremento das deformações plásticas deve ser tal que assegure um valor não-negativo para o trabalho (2.25).

Conclui-se então que os incrementos da deformação plástica devem ser normais e exteriores à superfície de cedência [13].

LEI DE ENDURECIMENTO:

A lei de endurecimento define como varia a forma da superfície de cedência durante o processo de deformação.

Muitos factores podem afectar o endurecimento do material, entre os quais estão o historial de carregamento, a sua velocidade de aplicação, a temperatura e suas variações, etc. No entanto, face às hipóteses base indicadas no início do capítulo, o único parâmetro relevante é o historial de carga a que o material foi sujeito.

Vários modelos são utilizados na prática para caracterizar o endurecimento do material, entre os quais: o modelo de *endurecimento isotrópico*, o *endurecimento cinemático* e o *endurecimento misto*, Figura 2-7 [2, 10].

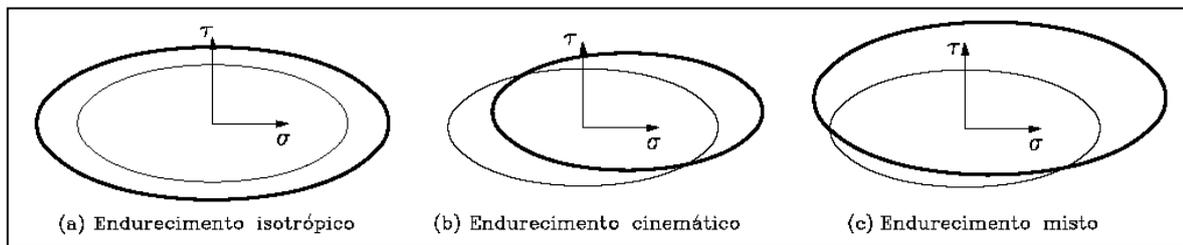


Figura 2-7: Leis de endurecimento mais utilizadas (adaptado de [10]).

A lei mais simples corresponde ao endurecimento isotrópico, no qual a superfície de cedência sofre apenas uma expansão uniforme, não sofrendo qualquer translação, Figura 2-7a.

Um modelo matemático para a função de cedência seria do tipo [13],

$$f(\hat{\sigma}, \kappa) = \hat{\sigma} - \sigma_0(\kappa), \quad (2.30)$$

onde (κ) representa o(s) parâmetro(s) de endurecimento do material.

Utilizando o modelo anterior, a zona com comportamento elástico do material aumenta durante o processo de deformação plástica, o que contradiz o *efeito de Bauschinger* [29], presente na maioria dos materiais dúcteis, segundo o qual, a amplitude do troço elástico de um material sujeito a acções cíclicas se mantém praticamente constante. No entanto, tendo em consideração a hipótese base do carregamento ser monotónico, este modelo para o endurecimento é adequado.

A lei de endurecimento cinemático modela o endurecimento como uma translação da superfície de cedência, tal como se encontra indicado na Figura 2-7b. Esta lei é mais apropriada para a consideração do efeito de Bauschinger em estruturas sujeitas a acções cíclicas.

A função de cedência é neste caso definida através de um parâmetro de endurecimento (β). De forma a garantir que o endurecimento não provoca um aumento do troço elástico do material [13], esta expressão pode tomar a forma genérica:

$$f(\hat{\sigma}, \beta) = (\hat{\sigma} - \beta)^2 - (\sigma_0)^2. \quad (2.31)$$

A Figura 2-8 representa um ensaio uniaxial realizado num material com endurecimento linear. A lei de endurecimento isotrópico conduziria a um andamento tipo OABEF, enquanto que o endurecimento cinemático a OABCD.

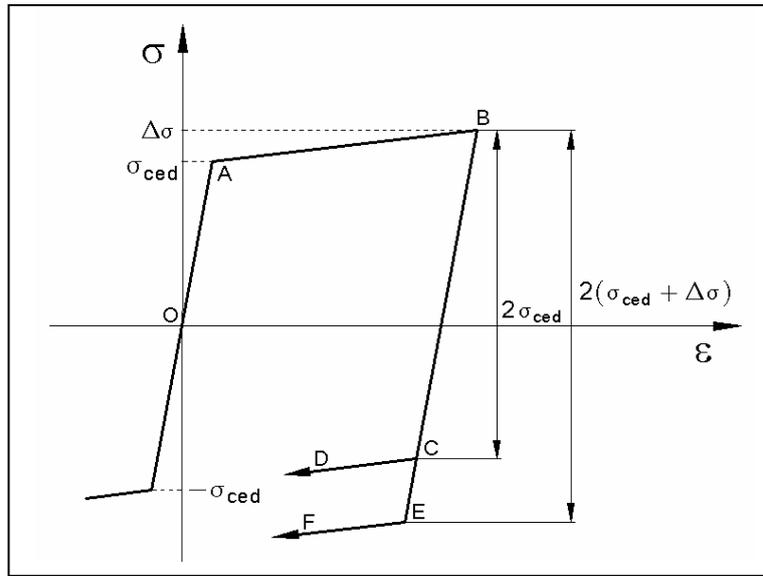


Figura 2-8: Modelos de endurecimento linear - isotrópico vs cinemático.

A lei de endurecimento misto permite combinar as características das duas leis anteriores, resultando numa superfície de cedência que sofre tanto translação como expansão, Figura 2-7 c).

Para a avaliação da fase de endurecimento em que o material se encontra, é necessário guardar um, ou vários parâmetros de endurecimento (κ). Neste trabalho adoptou-se como parâmetro de endurecimento a *deformação plástica* (ϵ_p).

Para que seja possível incluir na definição das relações constitutivas os resultados de ensaios experimentais, utiliza-se o conceito de tensão efectiva (σ^{ef}) e de deformação plástica efectiva (ϵ_p^{ef}). No caso de um ensaio à tracção simples, verifica-se que ($\sigma^{ef} = \sigma$), e que ($\epsilon_p^{ef} = \epsilon_p$) [10]. É possível relacionar directamente através da expressão (2.32), os incrementos de carga com os incrementos da deformação plástica, recorrendo ao conceito de *módulo de plasticidade* (H'), conforme indicado na Figura 2-9 [10]:

$$\Delta\sigma = H' \Delta\varepsilon_p, \quad (2.32)$$

com,

$$H'(\varepsilon_p) = \frac{E_t(\varepsilon_p)}{1 - \frac{E_t(\varepsilon_p)}{E}}, \quad (2.33)$$

e onde (E_t) é o denominado *módulo elastoplástico*.

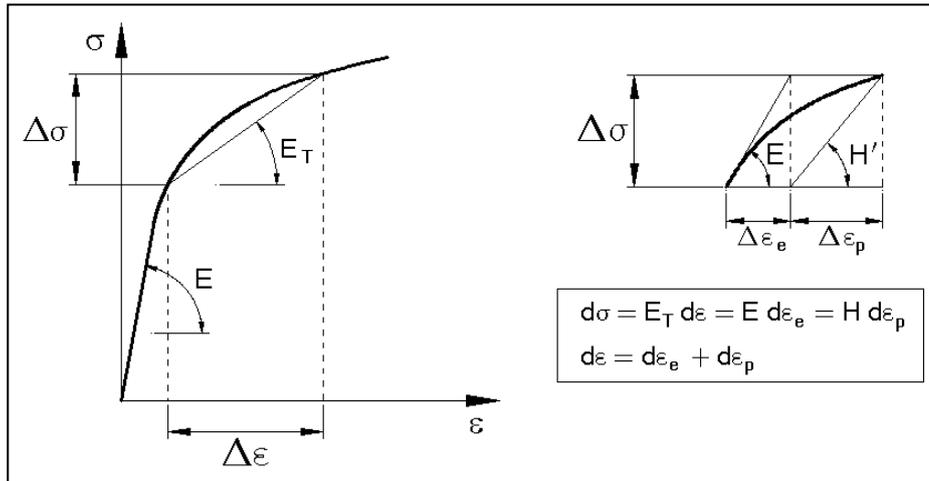


Figura 2-9: Definição do módulo de plasticidade.

CONDIÇÃO DE CONSISTÊNCIA:

Durante um processo de deformação plástica, independentemente de haver endurecimento, o estado de tensão tem de permanecer sobre a superfície de cedência, o que se traduz por:

$$df(\sigma, \kappa) = 0, \quad (2.34)$$

ou seja:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0. \quad (2.35)$$

Analisando a expressão anterior, é possível estabelecer as seguintes conclusões:

1. caso haja endurecimento $\frac{\partial f}{\partial \kappa} \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa \Rightarrow \text{a componente normal à superfície de cedência do vector}$$

incremento de tensão é devida ao endurecimento.

2. caso não haja endurecimento $\frac{\partial f}{\partial \kappa} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \text{o vector incremento de tensão é tangente à superfície de cedência.}$$

CONDIÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE:

Definem-se as *condições de complementaridade*, para relacionar a evolução do campo estático (f), com o campo cinemático plástico (ε_p), tendo em consideração as situações de carregamento possíveis. Assim sendo, durante um incremento de tensão ($d\sigma_{ij}$), podem ocorrer os seguintes casos de carregamento (Figura 2-10):

$$\left\{ \begin{array}{l} f < 0 \quad \rightarrow \text{carregamento em regime elástico, } d\varepsilon_t = d\varepsilon_e . \\ f = 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \geq 0 \rightarrow \text{carregamento em regime elastoplástico, } d\varepsilon_t = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p . \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \rightarrow \text{descarga em regime elástico, } d\varepsilon_t = d\varepsilon_e . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

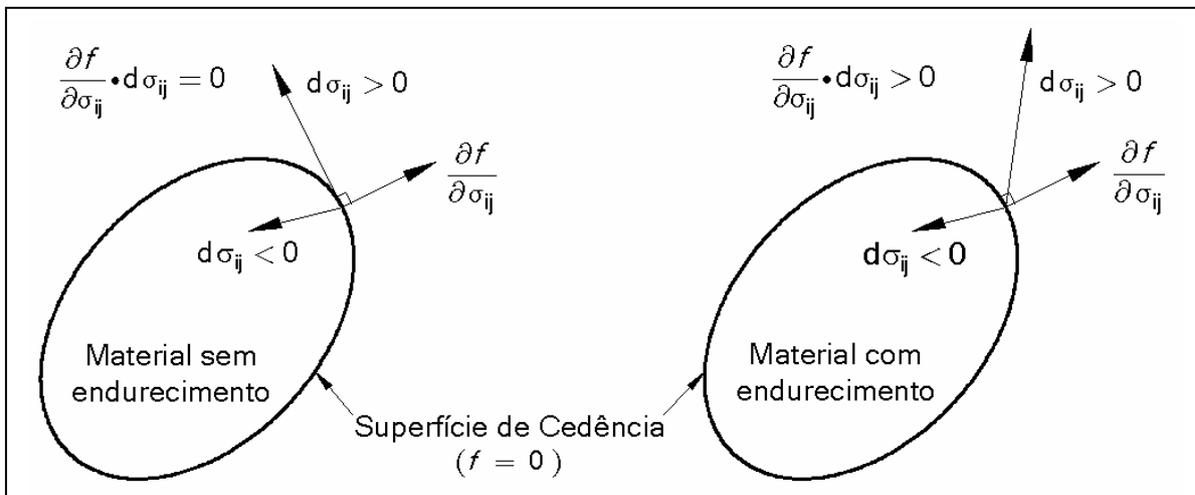


Figura 2-10: Situações possíveis de carregamento.

Para impor ao modelo que o carregamento se processe de acordo com as situações previstas, estabelecem-se as seguintes condições matemáticas [10]:

$$f \, d\varepsilon_p = 0, \tag{2.36}$$

$$df \, d\varepsilon_p = 0. \tag{2.37}$$

A primeira condição impõe que para haver incremento nas deformações plásticas é necessário que o ponto se encontre sobre a superfície de cedência.

A segunda condição verifica-se quando um ou ambos os termos se anulam. Estas situações correspondem a:

$$\begin{cases} df = 0 \wedge d\varepsilon_p \geq 0 & \text{- carregamento em regime elastoplástico.} \\ df < 0 \wedge d\varepsilon_p = 0 & \text{- descarga em regime elástico.} \end{cases}$$

Nesta fase aproveita-se para simplificar a notação utilizada, tirando partido do facto de se ter adoptado uma lei de escoamento associada. Define-se então de forma indiscriminada através de (ϕ_*) , a função de cedência e a função dos potenciais plásticos:

$$\phi_* = f = g. \quad (2.38)$$

Outra notação muito utilizada na literatura da especialidade diz respeito à representação do vector das normais à superfície definida pelo valor nulo da função dos potenciais plásticos através de (n_*) e do vector que reúne as derivadas da função de cedência em relação aos parâmetros de endurecimento através de (h_*) :

$$n_* = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.39)$$

$$h_* = \frac{\partial f}{\partial \kappa}. \quad (2.40)$$

2.5 - INTEGRAÇÃO DAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As relações constitutivas na fase plástica definidas anteriormente encontram-se definidas em termos das suas variações infinitesimais. Para efectuarmos uma análise elastoplástica incremental, necessitamos de as definir em termos de incrementos finitos. Para isso admite-se que o carregamento é aplicado e a plasticidade se desenvolve num intervalo de tempo fictício suficientemente pequeno $[\tau_{*,j}, \tau_{*,j+1}]$, denominado *intervalo de tempo convencional de plasticidade* [10].

Em cada intervalo, o incremento das deformações plásticas é definido por:

$$\Delta\varepsilon_p = \int_{\tau_{*,j}}^{\tau_{*,j+1}} \dot{\varepsilon}_p d\tau_*. \quad (2.41)$$

Salienta-se desde já que, tendo em conta as hipóteses adoptadas no início do capítulo, nenhuma das relações definidas até agora é dependente do tempo. Assim sendo, o termo $(\dot{\varepsilon}_p)$ está na realidade associado às suas variações no incremento de carga $(d\varepsilon_p = \dot{\varepsilon}_p d\tau_*)$ e não a uma variação no tempo propriamente dita.

Introduzindo a lei de escoamento (2.28), a qual estabelece a forma como se processam as variações infinitesimais das deformações plásticas, obtém-se:

$$\Delta \varepsilon_p = \int_{\tau_{*,j}}^{\tau_{*,j+1}} n_* \dot{\varepsilon}_* d\tau_* \quad (2.42)$$

O modo como se efectua a integração indicada em (2.42) é de extrema importância, tendo influência não só nos resultados obtidos, como na própria estruturação do modelo elastoplástico. Nos trabalhos de Crisfeld [18] e Zienkiewicz et al. [67] encontra-se debatido com maior profundidade este assunto. No entanto, com o intuito de justificar o procedimento adoptado, compara-se o método escolhido com outros procedimentos, referindo as suas principais vantagens e desvantagens.

Primeiro que tudo, é necessário estabelecer que, não sendo possível avaliar (2.42) de forma exacta, na análise incremental se substituem as grandezas que variam de forma contínua por variações definidas com base em combinações (em geral lineares) dos seus valores discretos. Este procedimento pode ser visto como uma aplicação do *teorema do valor médio* para integrais definidos [57].

$$\Delta \varepsilon_p = \int_{\tau_{*,j}}^{\tau_{*,j+1}} \dot{\varepsilon}_* n_* d\tau_* = \bar{n}_* \cdot \Delta \varepsilon_*, \text{ com } \bar{n}_* \in [n_{*,j}, n_{*,j+1}]. \quad (2.43)$$

O problema reside em não ser fácil saber qual o valor de (\bar{n}_*) que verifica a igualdade anterior. Podemos no entanto aproximar o valor de (2.42), recorrendo aos valores conhecidos de (n_*) , que neste caso são os associados ao início e ao final do passo de carga.

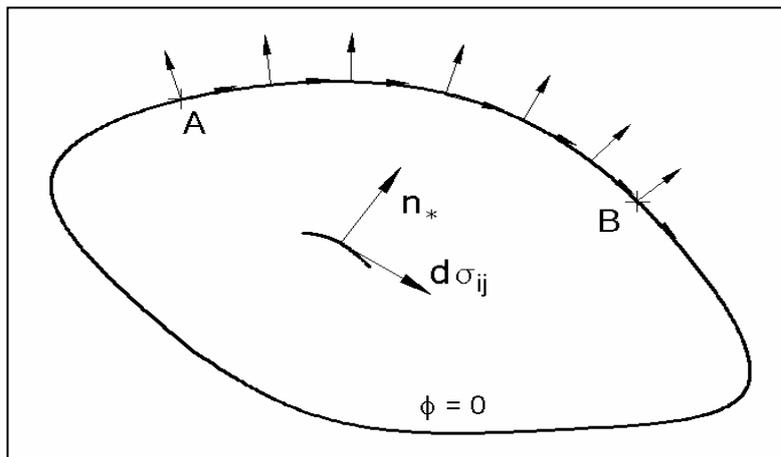


Figura 2-11: Integração das relações constitutivas com base em valores no início e no final do passo de carga.

Irão aparecer necessariamente erros nas soluções obtidas, que se acumulam ao longo do processo de carregamento. Estes erros são inversamente proporcionais ao tamanho do

incremento de carga, pois com a diminuição do passo de carga, tenderá a melhorar-se a aproximação da função integranda. Esta é uma das principais razões pela qual é conveniente discretizar o carregamento no maior número de intervalos possível.

Para ilustrar este conceito, considere-se uma porção infinitesimal de um material com comportamento elastoplástico perfeito sujeito a um incremento de carga, levando o estado de tensão a deslocar-se desde um ponto inicial A, até ao ponto B, Figura 2-11. A correcta evolução dos campos de tensão e das deformações plásticas depende dos estados intermédios a que o material se encontra sujeito (percurso de A para B), e só por acaso poderia ser correctamente obtido apenas com base nos valores iniciais e finais do incremento de carga.

Várias estratégias podem ser utilizadas para o cálculo de (2.42), podendo ser classificados em *métodos explícitos* e *implícitos* [67].

Os métodos explícitos utilizam as grandezas conhecidas no início de cada incremento de carga, sendo os mais utilizados o *método forward-Euler* e o *método da sub-incrementação*.

O método *forward-Euler* consiste na correcção dos pontos colocados fora da superfície de cedência num incremento elástico (troço \overline{XAB}), através de alterações aos campos de tensões (troço \overline{BC}) e da introdução de deformações plásticas proporcionais à normal da superfície de cedência no início do incremento ($n_{*,j}$) (Figura 2-12a).

Este método tem duas importantes desvantagens: a primeira consiste em ter de identificar o ponto onde o caminho de carga intersecta a superfície de cedência (ponto A), uma vez que a correcção não deverá incidir sobre o troço elástico do carregamento (troço \overline{XA}). Para uma condição de cedência geral, este cálculo pode não ser fácil. A outra desvantagem consiste no facto de, regra geral, o estado de tensão que se obtém no final do incremento de carga, não respeitar novamente a condição de cedência (ponto C).

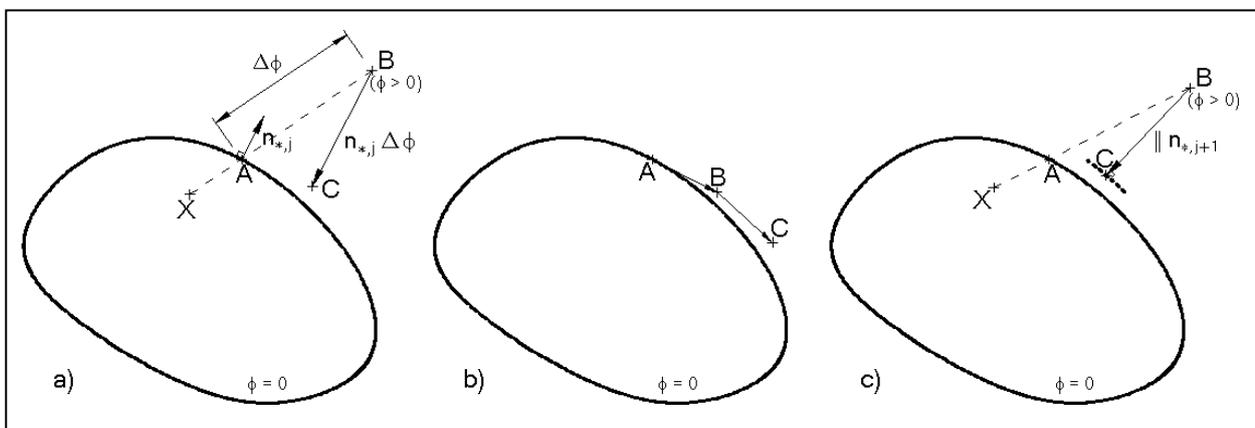


Figura 2-12: Métodos de integração das relações constitutivas (adaptado de [18]).

O método da sub-incrementação esquematizado na Figura 2-12b, consiste em subdividir o incremento de carga em vários troços (A, B, C...), nos quais os erros associados à utilização da normal inicial, são controlados e suficientemente pequenos. Este método tem como principal vantagem a sua simplicidade, pois permite dispensar a fase de correcção dos pontos fora da superfície de cedência. No entanto, a maior necessidade de cálculo, a acumulação de erros e a possibilidade de haver violação da condição de cedência, faz com que não seja muito utilizado.

Em ambos os métodos é possível ajustar a solução no final do incremento, para que a condição de cedência seja respeitada. No entanto, estão em geral associados a um posterior escalamento do campo de tensões, conduzindo à introdução de deformações plásticas artificiais, o que leva a que muitos autores não recomendem estes procedimentos [16].

Os métodos implícitos utilizam grandezas que são apenas determinadas durante ou após o incremento de carga. Assim sendo, os dados base que permitem definir e iniciar o incremento de carga, são produto do próprio incremento de carga, levando a que estes métodos necessitem estar associados a algoritmos iterativos, tipo *Newton-Raphson*.

O método implícito mais utilizado é o *método implícito de Euler*, na designação anglo-saxónica "*backward-Euler*" [18] (Figura 2-12c). Consiste em corrigir, após cada incremento de carga (troço \overline{XAB}), os pontos situados fora da superfície de cedência, através de alterações aos campos de tensões (troço \overline{BC}) e da introdução de deformações plásticas proporcionais à normal da superfície de cedência no final do incremento ($n_{*,j+1}$). Gera-se então um processo iterativo que termina quando a correcção final conduz a um estado de tensão que satisfaça a condição de cedência, ou quando a diferença seja tão pequena quanto se queira.

A principal vantagem deste método consiste em ser possível obter soluções que respeitam a condição de cedência. No entanto, é necessário recorrer a métodos iterativos, o que constitui a sua maior desvantagem.

Podem ser também utilizadas combinações dos métodos anteriores, definidas por exemplo como uma ponderação dos valores nas extremidades do passo de carga:

$$\Delta\varepsilon_p = [(1-\theta)n_{*,j} + \theta n_{*,j+1}]\Delta\varepsilon_*, \text{ com } \theta \in [0,1], \quad (2.44)$$

Estes formatos correspondem às denominadas *leis trapezoidais*, e no caso particular de $\left(\theta = \frac{1}{2}\right)$ recupera-se a *lei do valor médio* [18].

Alguns autores afirmam que o método implícito de Euler é o método mais estável e o que produz melhores resultados para passos de carga grandes [18]. Neste trabalho optou-se por utilizar este método.

Aplicando o método implícito de Euler para efectuar a integração (2.42), obtém-se:

$$\Delta \varepsilon_p = n_{*,j+1} \Delta \varepsilon_* , \quad (2.45)$$

ficando as deformações plásticas no final do passo de carga, definidas por:

$$\varepsilon_{p,j+1} = \varepsilon_{p,j} + \Delta \varepsilon_p = \varepsilon_{p,j} + n_{*,j+1} \Delta \varepsilon_* . \quad (2.46)$$

A condição de escoamento plástico (2.47), de cedência (2.48), de consistência (2.49) e de complementaridade (2.50) e (2.51) escritas na forma incremental, são definidas por:

$$\Delta \varepsilon_* \geq 0 , \quad (2.47)$$

$$\phi_* + \Delta \phi_* \leq 0 , \quad (2.48)$$

$$\Delta \phi_* = n_{*,j+1}^t \Delta \sigma - h_{*,j+1} \Delta \varepsilon_* , \quad (2.49)$$

$$\phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 , \quad (2.50)$$

$$\Delta \phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 . \quad (2.51)$$

Capítulo 3

Modelo de Elementos Finitos

3.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo tem como objectivo introduzir o modelo de elementos finitos utilizado para a resolução do problema genérico formulado no capítulo anterior.

Numa fase inicial, apresentam-se de forma genérica as principais formulações de elementos finitos existentes, começando pelas formulações clássicas, passando depois para os modelos alternativos, entre os quais se encontra o modelo adoptado neste trabalho. Numa segunda fase apresenta-se o modelo de elementos finitos *híbrido-misto de tensão* (HMT), aplicado a análises elastoplásticas [9, 10].

A utilização do modelo HMT permite obter soluções onde as deficiências no equilíbrio, típicas dos modelos tradicionais, são menores ou mesmo inexistentes. Assim sendo, é legítimo alimentar uma maior expectativa na qualidade da solução final, especialmente quando se trata de análises fisicamente não lineares, que evoluem de acordo com informação fornecida pelo campo estático.

O modelo implementado é caracterizado por impor ponderadamente, pelo método dos resíduos pesados, todas as relações fundamentais do problema, sendo aproximadas directamente e de forma independente o campo de tensões e deslocamentos no domínio, bem como o campo de deslocamentos na fronteira estática. A possibilidade de se utilizar qualquer conjunto completo

de funções de aproximação, leva a que frequentemente sejam utilizadas funções ortogonais, permitindo desta forma contrabalançar com esparsidade, as elevadas dimensões do sistema governativo HMT.

O modelo de elementos finitos para a análise elastoplástica é formulado a partir das relações fundamentais apresentadas no capítulo anterior. É caracterizado por definir cinematicamente a plasticidade, utilizar uma lei de escoamento associada e efectuar a integração das relações constitutivas pelo método implícito de Euler. O modelo de elementos finitos é definido na forma incremental, permitindo acompanhar o aparecimento dos fenómenos plásticos e minimizar os erros provenientes da integração das relações constitutivas.

A utilização do método implícito de Euler tem como consequência a necessidade de incorporar um algoritmo iterativo, pois necessita de informação do campo de tensões no final de cada passo de carga. Neste trabalho utilizou-se o método de Newton-Raphson para a resolução deste problema.

3.2 - FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos tem conhecido um grande desenvolvimento nas últimas décadas, essencialmente devido ao avanço e à generalização dos meios informáticos utilizados na resolução de problemas de engenharia estrutural, permitindo conferir o suporte necessário à implementação numérica do método.

O *modelo de deslocamentos*, ou de compatibilidade, é o mais utilizado e com maior tradição nos diversos campos da engenharia, razão pela qual é muitas vezes designado por *modelo tradicional*. Esta formulação tem como principais vantagens a sua simplicidade e o significado físico preciso das grandezas intervenientes, visto utilizar o conceito de *interpolação nodal*. As suas maiores desvantagens são a menor qualidade do campo estático, devido a ser obtido de forma indirecta do campo cinemático, não verificando o equilíbrio quer no domínio, quer nas fronteiras dos elementos. Obtêm-se desta forma soluções que podem não se encontrar do lado da segurança. A qualidade da solução é também muitas vezes fortemente condicionada pela malha utilizada para discretizar a estrutura, bem como na sua relação com o carregamento aplicado (*dependência malha-carregamento*), levando a que a geração de malhas seja muitas vezes uma tarefa complexa e criteriosa, justificando inúmeros trabalhos de investigação neste domínio. Neste modelo, a qualidade da solução é quase sempre aumentada recorrendo a refinamentos da malha (refinamento h). Estes modelos apresentam ainda problemas de sensibilidade à distorção da malha, bem como os fenómenos de *shear locking* e *boundary layer* na análise de problemas de laje, que condicionam a qualidade da solução obtida.

As limitações da formulação tradicional, levaram ao desenvolvimento de formulações alternativas mais exigentes, potentes e complexas. É o caso dos *modelos híbridos*, *híbridos-Trefftz*, *mistos* e *híbridos-mistos*, a que neste trabalho designaremos genericamente por *formulações não convencionais* [20].

Salienta-se desde já, o trabalho efectuado no desenvolvimento dos modelos híbridos, inicialmente por Pian *et al.* [47], e mais recentemente no grupo de Análise de Estruturas do ICIST, nomeadamente por Freitas *et al.* [21, 23], Pereira [39], Castro [10], cujo trabalho forneceu muitas das bases necessárias ao desenvolvimento desta dissertação de mestrado.

A nomenclatura utilizada nestes modelos foi introduzida inicialmente por Pian [46]. Designa por *modelos mistos*, aqueles onde sejam aproximados de forma simultânea e independente, os campos estático e cinemático no domínio dos elementos. Nos *modelos híbridos* são definidas aproximações diferentes para os campos no domínio e na fronteira do elemento. Estes modelos podem ainda ser divididos em *modelos de tensão* e em *modelos de deslocamento*, conforme se aproxime o campo de deslocamentos na fronteira estática ou o campo de tensões na fronteira cinemática, respectivamente.

Estas formulações são deduzidas a partir dos princípios fundamentais da mecânica, não sendo utilizado nenhum conceito de carácter energético. No entanto, a definição das variáveis discretas permite assegurar a consistência energética no modelo de elementos finitos.

Ao contrário dos modelos tradicionais, em que as grandezas intervenientes têm um significado físico directo de deslocamentos e de forças nodais, nestes modelos abandona-se o conceito de interpolação nodal, pelo que os nós servem apenas para definir a geometria da estrutura. Estes modelos são caracterizados pela perda do significado físico de todas grandezas intervenientes, representando apenas o peso a dar a cada função de aproximação. Assim sendo, nos modelos não convencionais utilizam-se frequentemente funções de aproximação hierárquicas, facilitando os refinamentos do grau da aproximação (refinamento- p) e a incorporação de processos p -adaptativos [6, 39].

As formulações aqui discutidas diferem essencialmente em dois aspectos: em primeiro lugar nos campos que são directamente aproximados e nas restrições impostas às funções de aproximação; o segundo aspecto diz respeito à forma como são verificadas as relações fundamentais, nomeadamente se são impostas de forma ponderada ou se são verificadas localmente. Em seguida procurar-se-á apresentar de forma sucinta estas características em cada um dos modelos:

O *modelo de deslocamento* [5, 7, 15, 61, 66, 67] ou de compatibilidade, é o modelo mais utilizado e com maior tradição nos diversos campos da engenharia. Neste modelo são

aproximados os campos de deslocamentos no domínio do elemento, utilizando funções que satisfaçam localmente as condições de compatibilidade (2.17) e (2.18), e são impostas na forma dos resíduos pesados as condições de equilíbrio (2.7) e a condição de fronteira estática (2.8), que aparece quando se efectua a integração por partes da condição de equilíbrio no domínio.

No *modelo de tensão* [39], ou de equilíbrio, é aproximado directamente o campo de tensões, utilizando-se funções de aproximação que respeitem as condições de equilíbrio (2.7) e (2.8). As condições de compatibilidade são impostas na forma dos resíduos pesados.

Os *modelos híbridos-Trefftz* [21, 22, 23] introduzidos inicialmente por Trefftz em 1926 [27], utilizam funções de aproximação que satisfazem à partida as condições fundamentais do problema no domínio, as relações de equilíbrio (2.7), de compatibilidade (2.17) e as relações constitutivas (2.21-2.22). Existem dois modelos: no modelo de tensão aproxima-se o campo de tensões, utilizando funções que satisfaçam o sistema de equações de Beltrami [23], enquanto que no modelo de deslocamento se aproxima o campo de deslocamentos, utilizando funções que satisfaçam o sistema de equações diferenciais de Navier [21]. Na definição dos diferentes operadores estruturais, estes modelos permitem efectuar as integrações apenas nas fronteiras dos elementos, recuperando uma das características do método dos elementos de fronteira. No entanto, apresentam um grau de dificuldade acrescida na definição das funções de aproximação, devido às restrições impostas à partida [10].

Os *modelos híbridos* [2, 44, 50] são caracterizados por se aproximar em simultâneo um dos campos no domínio dos elementos e um outro na fronteira. Existem igualmente dois tipos de modelos. No modelo híbrido de tensão, aproximam-se os campos de tensões no domínio, utilizando funções que satisfaçam as condições de equilíbrio (2.7), e os campos de deslocamentos ao longo da fronteira estática. Neste tipo de elemento, as fronteiras inter-elementares são consideradas como estáticas e as condições de equilíbrio na fronteira são impostas ponderadamente, utilizando as funções envolvidas na aproximação do campo de deslocamentos na fronteira. No estabelecimento do modelo discreto, as equações de compatibilidade no domínio são integradas por partes. No modelo híbrido de deslocamento, aproximam-se os campos de deslocamentos no domínio, utilizando funções que satisfaçam a condição de compatibilidade (2.17), e os campos de tensões aplicadas ao longo da fronteira cinemática, que se considera neste caso englobar também as fronteiras inter-elementares. As condições de compatibilidade na fronteira são impostas na forma de resíduos pesados, utilizando-se para a ponderação as funções envolvidas na aproximação do campo de tensões aplicadas ao longo da fronteira cinemática. Neste modelo, é integrada por partes a equação de equilíbrio no domínio do elemento.

Nos *modelos mistos* aproximam-se simultaneamente os campos de tensões e deslocamentos no domínio dos elementos. Nos modelos de tensão são utilizadas funções de aproximação que verifiquem as condições de equilíbrio na fronteira (2.8), com as funções envolvidas na aproximação do campo de deslocamentos, a serem utilizadas para impor ponderadamente as condições de equilíbrio no domínio. Nos modelos de compatibilidade utilizam-se funções que verifiquem a condição de compatibilidade na fronteira cinemática (2.18), e as condições de compatibilidade no domínio são impostas ponderadamente, utilizando-se para tal efeito as funções envolvidas na aproximação do campo de tensões no domínio. No entanto, estes modelos não são muito utilizados, pois usualmente é mais vantajoso utilizar funções de aproximação que verifiquem as relações fundamentais no domínio, em detrimento das funções que as verifiquem nas fronteiras (modelos híbridos).

Nos *modelos híbridos-mistos* [9, 10, 39, 41] são aproximados de forma independente, o campo estático e cinemático no interior do elemento, e ainda um outro campo ao longo da fronteira. Existem novamente dois tipos de modelos. Nos modelos de tensão (deslocamento) é aproximado também o campo de deslocamentos (tensões) na fronteira estática (cinemática), englobando em cada um dos casos também as fronteiras inter-elementares. Estes modelos permitem uma grande liberdade na escolha das funções de aproximação, pois não têm que verificar nenhuma condição à partida, utilizando-se usualmente funções ortogonais, como por exemplo polinómios de Legendre [40, 42], funções trigonométricas [39], wavelets [6, 10] e funções de Walsh [9, 10].

Comparativamente com o modelo tradicional, o modelo HMT permite obter melhores aproximações para o campo de tensões, pois é directamente aproximado e toda a sua formulação privilegia o campo estático, reflectindo-se nas relações que são integradas por partes e no tratamento que é dado às condições de equilíbrio.

Conforme já foi referido, no caso de análises fisicamente não lineares, a qualidade do campo estático tem importância redobrada, pois todo o processo de cálculo evolui de acordo com a informação obtida do campo tensões, que caso não satisfaça as condições de equilíbrio, pode conduzir a parâmetros de colapso sobreavaliados.

No entanto, estes modelos são mais pesados e complexos, não sendo portanto tão intuitivos como os modelos tradicionais. Geralmente, dão origem a sistemas governativos de grandes dimensões, no entanto, esta desvantagem pode ser contrariada utilizando funções ortogonais (sistemas governativos esparsos) e utilizando técnicas de processamento em paralelo [14].

Regista-se também a possibilidade de existência de modos espúrios cinemáticos [43]. No entanto, a utilização de algumas regras na construção da aproximação, permite reduzir ou mesmo controlar este problema.

Em resumo, é possível elaborar um quadro onde se reúnem as principais características dos modelos apresentados (Quadro 3-1).

| MODELO | C. TENSÕES | | C. DESLOC. | | R. EQ. | | R. COMP. | | R.CON.S. | INTEGRA-SE POR PARTES |
|---------------------------------|------------|------------|------------|-----------------|--------|-----------------|----------|------------|----------|-----------------------|
| | V | Γ_u | V | Γ_σ | V | Γ_σ | V | Γ_u | | |
| DESLOCAMENTO | | | ■ | | | | | | | EQUILÍBRIO |
| HÍBRIDO DE DESLOCAMENTO | | ■ | ■ | | | | | | | EQUILÍBRIO |
| HÍBRIDO-TREFFTZ DE DESLOCAMENTO | | | | | ■ | ■ | | | | EQUILÍBRIO |
| MISTO DE DESLOCAMENTO | ■ | | | | | | | | | EQUILÍBRIO |
| HÍBRIDO-MISTO DE DESLOCAMENTO | ■ | | | | | | | | | EQUILÍBRIO |
| HÍBRIDO-MISTO DE TENSÃO | | | | ■ | | | | | | COMPATIBILIDADE |
| MISTO DE TENSÃO | | | | | | | | | | COMPATIBILIDADE |
| HÍBRIDO-TREFFTZ DE TENSÃO | | | | ■ | ■ | ■ | | | | COMPATIBILIDADE |
| HÍBRIDO DE TENSÃO | | | | | | | | | | COMPATIBILIDADE |
| TENSÃO | | | | | | | | | | COMPATIBILIDADE |

LEGENDA:
 GRANDEZAS APROXIMADAS ■
 RELAÇÕES IMPOSTAS DE FORMA PONDERADA ■
 RELAÇÕES VERIFICADAS LOCALMENTE ■

Quadro 3-1: Resumo das características dos modelos de elementos finitos.

3.3 - DEFINIÇÃO DA APROXIMAÇÃO

No modelo híbrido-misto de tensão, são aproximados simultaneamente e de forma independente os campos de tensões (3.1) e de deslocamentos (3.2) no domínio de cada elemento. São também aproximados os campos de incrementos dos parâmetros plásticos (3.3) no domínio e o campo de deslocamentos na fronteira estática (3.4).

$$\sigma = S_V X + \sigma_p \quad \text{em } V, \quad (3.1)$$

$$u_v = U_v q_v + u_p \quad \text{em } V, \quad (3.2)$$

$$\Delta \varepsilon_* = P_* \Delta e_* \quad \text{em } V, \quad (3.3)$$

$$u = U_\gamma q_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (3.4)$$

As matrizes $\{S_V, U_v, P_*, U_\gamma\}$ reúnem as funções de aproximação associadas às variáveis generalizadas $\{X, q_v, \Delta e_*, q_\gamma\}$.

Os vectores (σ_p) e (u_p) definem soluções particulares para os campos de tensões e de deslocamentos no domínio [10].

As grandezas duais associadas às variáveis discretas introduzidas, são definidas por forma a serem energeticamente consistentes com as variáveis contínuas que aproximam [10]:

$$e^t X = \int \varepsilon^t (\sigma - \sigma_p) dV, \quad (3.5)$$

$$q_V^t Q_V = \int b^t (u - u_p) dV, \quad (3.6)$$

$$\Delta e_*^t \Delta \Phi_* = \int \Delta \varepsilon_*^t \Delta \phi_* dV, \quad (3.7)$$

$$q_\gamma^t Q_\gamma = \int u^t t_\gamma d\Gamma_\sigma. \quad (3.8)$$

Introduzindo-se as aproximações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4), obtêm-se as seguintes definições para as *deformações generalizadas* (e), *forças de massa generalizadas* (Q_V), *incrementos dos potenciais plásticos generalizados* ($\Delta \Phi_*$), e *forças na fronteira generalizadas* (Q_γ):

$$e = \int S_V^t \varepsilon dV, \quad (3.9)$$

$$Q_V = \int U_V^t b dV, \quad (3.10)$$

$$\Delta \Phi_* = \int P_*^t \Delta \phi_* dV, \quad (3.11)$$

$$Q_\gamma = \int U_\gamma^t t_\gamma d\Gamma_\sigma. \quad (3.12)$$

3.4 - RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO

A condição de equilíbrio no domínio (2.7) é imposta na forma dos resíduos pesados, utilizando-se as funções de aproximação do campo de deslocamentos no domínio, para efectuar a ponderação [10]:

$$\int U_V^t (D\sigma + b) dV = 0. \quad (3.13)$$

Introduzindo a aproximação (3.1), obtém-se:

$$\int U_V^t D S_V X dV + \int U_V^t D \sigma_p dV = - \int U_V^t b dV, \quad (3.14)$$

que pode ser escrita na forma:

$$A_V^t X = -Q_V - Q_p, \quad (3.15)$$

onde:

$$A_V = \int (D S_V)^t U_V dV, \quad (3.16)$$

$$Q_V = \int U_V^t b dV,$$

$$Q_p = \int U_V^t D \sigma_p dV. \quad (3.17)$$

A condição de equilíbrio na fronteira estática (2.8) é imposta ponderadamente, utilizando-se as funções de aproximação do campo de deslocamentos na fronteira, para efectuar a ponderação [10]:

$$\int U_{\gamma}^t (N\sigma - t_{\gamma}) d\Gamma_{\sigma} = 0. \quad (3.18)$$

Introduzindo a aproximação (3.1), obtém-se:

$$\int U_{\gamma}^t NS_v X d\Gamma_{\sigma} + \int U_{\gamma}^t N\sigma_p d\Gamma_{\sigma} = \int U_{\gamma}^t t_{\gamma} d\Gamma_{\sigma}, \quad (3.19)$$

que pode ser escrita na forma:

$$A_{\gamma}^t X = +Q_{\gamma} - Q_{\gamma p}, \quad (3.20)$$

onde:

$$A_{\gamma} = \int (NS_v)^t U_{\gamma} d\Gamma_{\sigma}, \quad (3.21)$$

$$Q_{\gamma} = \int U_{\gamma}^t t_{\gamma} d\Gamma_{\sigma}, \quad (3.22)$$

$$Q_{\gamma p} = \int U_{\gamma}^t N\sigma_p d\Gamma_{\sigma}. \quad (3.23)$$

A expressão (3.20) corresponde à imposição ponderada da condição de fronteira estática. Pode ser encarada também como resultando do equilíbrio ponderado entre elementos adjacentes, definindo-se neste contexto a fronteira estática como abrangendo também as fronteiras inter-elementares.

As relações de equilíbrio (3.15) e (3.20) podem ser agrupadas em:

$$\begin{bmatrix} -A_v^t \\ A_{\gamma}^t \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} Q_v + Q_p \\ Q_{\gamma} - Q_{\gamma p} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

3.5 - RELAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

A condição de compatibilidade no domínio (2.17), é imposta na forma dos resíduos pesados, utilizando-se na ponderação, as funções de aproximação do campo de tensões no domínio [10]:

$$\int S_v^t (\varepsilon - D^* u) dV = 0. \quad (3.25)$$

Introduzindo a definição (3.9), integrando por partes, e aplicando o teorema da divergência de forma a mobilizar os termos de fronteira, obtém-se:

$$e = \int S_v^t D^* u dV = - \int (DS_v)^t u dV + \int (NS_v)^t u d\Gamma. \quad (3.26)$$

Separando as fronteiras cinemáticas das estáticas e introduzindo a condição de compatibilidade na fronteira cinemática (2.18) resulta:

$$e = - \int (DS_V)^t u \, dV + \int (NS_V)^t u \, d\Gamma_\sigma + \int (NS_V)^t u_\gamma \, d\Gamma_u . \quad (3.27)$$

Introduzindo as aproximações (3.2) e (3.4), obtém-se a equação:

$$e = - \int (DS_V)^t U_V q_V \, dV - \int (DS_V)^t u_p \, dV + \int (NS_V)^t U_\gamma q_\gamma \, d\Gamma_\sigma + \int (NS_V)^t u_\gamma \, d\Gamma_u , \quad (3.28)$$

que pode ser escrita na forma:

$$e = -A_V q_V + A_\gamma q_\gamma + e_\gamma - e_{pp} , \quad (3.29)$$

onde:

$$e_\gamma = \int (NS_V)^t u_\gamma \, d\Gamma_u , \quad (3.30)$$

$$e_{pp} = \int (DS_V)^t u_p \, dV . \quad (3.31)$$

A condição de fronteira cinemática (2.18) é imposta localmente, quando introduzida em (3.27). A continuidade dos deslocamentos numa fronteira comum a dois elementos é igualmente imposta localmente, quando se garante que estes partilham a aproximação para o campo de deslocamentos definida ao longo da fronteira comum [10].

3.6 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Conforme foi visto anteriormente, no domínio elastoplástico o campo de deformações totais recebe a contribuição de uma parcela elástica reversível e de uma parcela plástica irreversível (2.20). O mesmo sucede com as variáveis discretas do modelo de elementos finitos:

$$e_t = e_e + e_p , \quad (3.32)$$

Através do mesmo critério energético utilizado em (3.5), obtém-se a definição de cada uma das parcelas de deformação [10]:

$$e_e = \int S_V^t \varepsilon_e \, dV , \quad (3.33)$$

$$e_p = \int S_V^t \varepsilon_p \, dV . \quad (3.34)$$

3.6.1 - FASE ELÁSTICA

As relações constitutivas na fase elástica (2.21) são impostas na forma dos resíduos pesados, utilizando-se para efectuar a ponderação as funções de aproximação do campo de esforços no domínio [10]:

$$\int S_V^t (\varepsilon_e - f \sigma - \varepsilon_\theta) dV = 0. \quad (3.35)$$

Introduzindo a aproximação (3.1) e a definição (3.33):

$$e_e = \int S_V^t f S_V X dV + \int S_V^t f \sigma_p dV + \int S_V^t e_\theta dV, \quad (3.36)$$

que pode ser escrita na forma:

$$e_e = F X + e_{pe} + e_\theta, \quad (3.37)$$

onde:

$$F = \int S_V^t f S_V dV, \quad (3.38)$$

$$e_{pe} = \int S_V^t f \sigma_p dV, \quad (3.39)$$

$$e_\theta = \int S_V^t \varepsilon_\theta dV. \quad (3.40)$$

3.6.2 - FASE PLÁSTICA

A lei de escoamento (2.45) é imposta ponderadamente, utilizando as funções de aproximação do campo de esforços no domínio [10]:

$$\int S_V^t (\Delta \varepsilon_p - n_{*,j+1} \Delta \varepsilon_*) dV = 0. \quad (3.41)$$

Introduzindo a aproximação (3.3), obtém-se a igualdade:

$$\int S_V^t \Delta \varepsilon_p dV - \int S_V^t n_{*,j+1} P_* \Delta \varepsilon_* dV = 0, \quad (3.42)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\Delta e_p = N_* \Delta e_*, \quad (3.43)$$

onde:

$$N_* = \int S_V^t n_{*,j+1} P_* dV. \quad (3.44)$$

A condição de escoamento plástico (2.47) define-se no modelo de elementos finitos, através da substituição da variável contínua pela discreta correspondente [10]:

$$\Delta e_* \geq 0. \quad (3.45)$$

A condição de cedência (2.48) é imposta na forma de resíduos pesados, utilizando-se as funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos para efectuar a ponderação [10]:

$$\int P_*^t (\phi_* + \Delta\phi_*) dV \leq 0. \quad (3.46)$$

Tendo em conta a definição (3.11), obtemos:

$$\Phi_* + \Delta\Phi_* \leq 0. \quad (3.47)$$

A condição de consistência (2.49) é imposta na forma de resíduos pesados, utilizando as funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos para efectuar a ponderação [10]:

$$\int P_*^t (\Delta\phi_* - n_{*,j+1}^t \Delta\sigma + h_{*,j+1} \Delta\varepsilon_*) dV = 0. \quad (3.48)$$

Tendo em conta a definição dos potenciais plásticos generalizados (3.11), introduzindo a aproximação do incremento do campo de tensões (3.1) e a aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos (3.3), obtém-se:

$$\Delta\Phi_* = \int P_*^t n_{*,j+1}^t S_V \Delta X dV - \int P_*^t h_{*,j+1} P_* \Delta e_* dV, \quad (3.49)$$

que pode ser escrito na forma:

$$\Delta\Phi_* = N_*^t \Delta X - H_* \Delta e_*, \quad (3.50)$$

onde:

$$H_* = \int P_*^t h_{*,j+1} P_* dV. \quad (3.51)$$

As condições de complementaridade (2.50) e (2.51), são impostas em média [10] através de:

$$\int \phi_* \Delta\varepsilon_* dV = 0, \quad (3.52)$$

$$\int \Delta\phi_* \Delta\varepsilon_* dV = 0. \quad (3.53)$$

Introduzindo a aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos (3.3) obtém-se:

$$\int \phi_* P_* \Delta e_* dV = 0, \quad (3.54)$$

$$\int \Delta\phi_* P_* \Delta e_* dV = 0, \quad (3.55)$$

que conduz a:

$$\Phi_*^t \Delta e_* = 0, \quad (3.56)$$

$$\Delta\Phi_*^t \Delta e_* = 0. \quad (3.57)$$

3.7 - SISTEMA GOVERNATIVO

Estando definidas cada uma das relações fundamentais do modelo de elementos finitos, interessa agora agrupá-las de forma a se obter o sistema governativo com uma organização racional. Salienta-se o facto de o **modelo elástico estar definido em termos de valores absolutos das grandezas**, enquanto que o modelo elastoplástico se define em termos dos incrementos das variáveis.

O sistema governativo do modelo HMT, pode ser definido de uma forma condensada, tirando partido do facto de ser possível definir uma das grandezas estruturais em função das restantes, o que permite obter um sistema com dimensões mais reduzidas. Usualmente são as tensões generalizadas (X) que estão ausentes, sendo obtidas de forma indirecta das restantes grandezas [10, 62]. À condensação estão geralmente associados os processos de espalhamento tradicionais do MEF, onde cada termo do sistema governativo resulta da soma de várias parcelas. A utilização do sistema governativo condensado, não fez parte dos objectivos deste trabalho, tendo sido utilizado o sistema governativo escrito no formato não condensado.

3.7.1 - MODELO ELÁSTICO

A condição de compatibilidade no domínio (3.29) e as relações constitutivas (3.37), estão ambas escritas em termos das deformações generalizadas, podendo ser agrupadas numa única equação:

$$-A_v q_v + A_\gamma q_\gamma + e_\gamma - e_{pp} = F X + e_{pe} + e_\theta. \quad (3.58)$$

Separando os termos independentes obtém-se:

$$F X + A_v q_v - A_\gamma q_\gamma = +e_\gamma - e_\theta - e_{pe} - e_{pp}. \quad (3.59)$$

Juntando as condições de equilíbrio no domínio (3.15) e na fronteira (3.20), obtém-se o sistema governativo global:

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\gamma \\ A_v^t & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ q_v \\ q_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\gamma - e_\theta - e_{pe} - e_{pp} \\ -Q_v - Q_p \\ -Q_\gamma + Q_{\gamma p} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Salienta-se que devido à preservação da dualidade estática-cinemática e da reciprocidade nas relações constitutivas no modelo discreto, a matriz do sistema governativo elástico é simétrica [10].

3.7.2 - MODELO ELASTOPLÁSTICO

O modelo é definido no instante final de um passo de carga $[\tau_{*,j}, \tau_{*,j+1}]$, a que designaremos de forma simplificada por instante $(j + 1)$. Posteriormente, será redefinido de forma a facilitar a implementação da análise incremental e iterativa.

O sistema governativo elastoplástico pode ser obtido do sistema elástico, adicionando as condições do modelo elastoplástico. A primeira diferença em relação ao modelo elástico reside no facto das deformações generalizadas totais (e_t) agora englobarem também uma parcela de deformações plásticas (e_p).

Desta forma, no final do passo de carga a expressão que engloba a imposição ponderada das relações constitutivas, fica definida por:

$$e_t = F X_{j+1} + e_{pe,j+1} + e_{\theta,j+1} + e_{p,j+1}, \quad (3.61)$$

Estas relações podem-se juntar novamente com as relações de compatibilidade (3.29), obtendo-se:

$$F X_{j+1} + A_v q_{v,j+1} - A_\gamma q_{\gamma,j+1} = +e_{\gamma,j+1} - e_{pp,j+1} - e_{\theta,j+1} - e_{pe,j+1} - e_{p,j+1}. \quad (3.62)$$

As relações de equilíbrio (3.24), são introduzidas no sistema através de:

$$A_v^t X_{j+1} = -Q_{v,j+1} - Q_{p,j+1}, \quad (3.63)$$

$$-A_\gamma^t X_{j+1} = -Q_{\gamma,j+1} - Q_{\gamma p,j+1}. \quad (3.64)$$

É ainda necessário que se verifique a condição de cedência (3.47), escrita no final do incremento de carga.

Matematicamente, o sistema governativo no instante $(j + 1)$, fica traduzido pelo seguinte conjunto de equações e inequações:

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\gamma \\ A_v^t & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j+1} \\ q_{v,j+1} \\ q_{\gamma,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\gamma,j+1} - e_{pp,j+1} - e_{\theta,j+1} - e_{pe,j+1} - e_{p,j+1} \\ -Q_{v,j+1} - Q_{p,j+1} \\ -Q_{\gamma,j+1} + Q_{\gamma p,j+1} \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

$$\Phi_{*,j+1} = \int P_*^t \phi_{*,j+1} dV \leq 0$$

3.8 - ANÁLISE INCREMENTAL

Conforme foi referido, pretende-se efectuar uma análise onde o carregamento é aplicado em sucessivos patamares de carga. Salienta-se que por carregamento se entende não só as tensões ou cargas impostas à estrutura, mas também os deslocamentos ou deformações.

A análise incremental e iterativa é necessária para acompanhar o aparecimento dos fenómenos plásticos e devido à utilização do método implícito de Euler na integração das relações constitutivas. Neste método é adoptado um valor fixo da normal à superfície de cedência durante todo o patamar de carregamento ($n_{*,j+1}$), levando a que seja necessário definir o carregamento a aplicar em incrementos suficientemente pequenos para que a qualidade da solução não seja afectada. Este assunto foi tratado com maior pormenor em §2.5.

O sistema definido em (3.65) para o instante ($j + 1$), pode ser escrito em função de cada uma das grandezas definidas no instante inicial do passo de carga (j), acrescidas de um incremento associado à nova etapa de carregamento.

As deformações plásticas generalizadas na forma incremental, são definidas por:

$$e_{p,j+1} = e_{p,j} + \Delta e_p. \quad (3.66)$$

Introduzindo a lei de escoamento (3.43), obtém-se:

$$e_{p,j+1} = e_{p,j} + N_* \Delta e_*. \quad (3.67)$$

A imposição ponderada das relações de constitutivas no final do passo de carga, fica então definida por:

$$e_t = F X_{j+1} + e_{pe,j+1} + e_{\theta,j+1} + e_{p,j} + N_* \Delta e_*. \quad (3.68)$$

Estas relações podem combinar-se novamente com as relações de compatibilidade (3.29), obtendo-se:

$$F X_{j+1} + A_v q_{v,j+1} - A_\gamma q_{\gamma,j+1} + N_* \Delta e_* = +e_{\gamma,j+1} - e_{pp,j+1} - e_{\theta,j+1} - e_{pe,j+1} - e_{p,j}. \quad (3.69)$$

A condição de cedência fica definida por:

$$\Phi_{*,j} + \Delta \Phi_* \leq 0. \quad (3.70)$$

O processo de carregamento deve ser tal que se verifiquem também as condições de complementaridade (3.56) e (3.57) e a condição de escoamento plástico (3.45), definidas respectivamente por:

$$\begin{cases} (\Phi_{*,j} + \Delta\Phi_*)^t \Delta e_* = 0; \\ \Delta\Phi_*^t \Delta e_* = 0 \end{cases}; \quad \Delta e_* \geq 0. \quad (3.71)$$

O sistema governativo elastoplástico na forma incremental fica então definido pelo seguinte conjunto de equações e inequações:

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\gamma & N_* \\ A_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j + \Delta X \\ q_{v,j} + \Delta q_v \\ q_{\gamma,j} + \Delta q_\gamma \\ \Delta e_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\gamma,j} + \Delta e_\gamma - e_{pp,j} - \Delta e_{pp} - e_{\theta,j} - \Delta e_\theta - e_{pe,j} - \Delta e_{pe} - e_{p,j} \\ -Q_{v,j} - \Delta Q_v - Q_{p,j} - \Delta Q_p \\ -Q_{\gamma,j} - \Delta Q_\gamma + Q_{\gamma p,j} + \Delta Q_{\gamma p} \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

$$\Phi_{*,j} + \Delta\Phi_* \leq 0; \quad \begin{cases} (\Phi_{*,j} + \Delta\Phi_*)^t \Delta e_* = 0; \\ \Delta\Phi_*^t \Delta e_* = 0 \end{cases}; \quad \Delta e_* \geq 0$$

3.8.1 - PROCESSO ITERATIVO - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Conforme já foi referido, na integração das relações constitutivas é necessário incorporar um método iterativo. Neste trabalho implementou-se um dos algoritmos iterativos mais utilizados, o método de Newton-Raphson (Figura 3-1 a).

Outros métodos poderiam ser utilizados, entre os quais salienta-se o método das perturbações [6, 10, 33], (Figura 3-1 b). Este método consiste em aproximar as relações não lineares que regem o modelo, através da sua decomposição em série de Taylor. Usualmente, considera-se a série truncada aos três primeiros termos. Refira-se que o método de Newton-Raphson, também pode ser interpretado como uma aproximação por série de Taylor, mas neste caso truncada à primeira derivada.

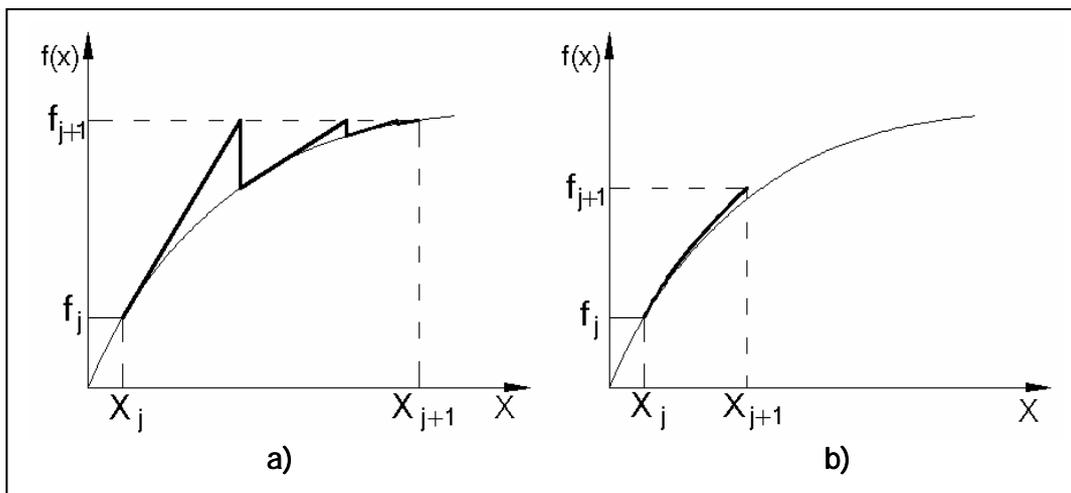


Figura 3-1: Representação esquemática do método de Newton-Raphson e do método das Perturbações.

As principais vantagens do método das perturbações residem na sua clareza e na facilidade de implementação no modelo HMT. Por outro lado, como o passo de carga é condicionado, quer pelo erro associado à aproximação (visto não serem efectuadas iterações), quer pela condição de activação de apenas um modo de cedência, muitas vezes a análise elastoplástica requer um grande número de incrementos de carga, tornando-se muito pesada quer do ponto de vista da quantidade de cálculos a efectuar, quer do ponto de vista da quantidade de informação a armazenar. Assim sendo, a utilização do método de Newton-Raphson surge com naturalidade, pois poderá permitir uma maior rapidez de cálculo, embora seja necessário implementar um processo iterativo para cada um dos passos de carga.

No método de Newton-Raphson, a estimativa do valor de uma variável (x) que satisfaça determinada equação $f(x) = 0$, pode ser obtida em cada iteração (i) através de:

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}. \quad (3.73)$$

Para a análise elastoplástica efectuada, aplicou-se este conceito muito simples generalizado a um sistema de equações de várias variáveis. Para evitar inverter a matriz que reúne as primeiras derivadas, é conveniente escrever o sistema de equações da seguinte forma:

$$[f'(x^i)]\{x^{i+1} - x^i\} = -\{f(x^i)\}, \quad (3.74)$$

O algoritmo do método de Newton-Raphson resume-se a efectuar recursivamente estimativas lineares definidas recorrendo às primeiras derivadas das relações fundamentais do modelo, de forma a eliminar os erros (restos ou resíduos) inerentes ao facto das estimativas serem lineares e obter desta forma a solução para o incremento de carga.

Conforme já foi referido, os restos indicam a diferença entre a solução obtida no final de cada iteração, e aquela que respeita as condições fundamentais do problema. O seu cálculo consiste na utilização das equações do sistema governativo presentes em (3.72), definidas na forma da procura de raízes. Desta forma, no final da iteração (i) os restos são calculados através de:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1^i = F \left(X_j + \sum_i^{N_H} \Delta X^i \right) + A_v \left(q_{v,j} + \sum_i^{N_H} \Delta q_v^i \right) - A_\gamma \left(q_{\gamma,j} + \sum_i^{N_H} \Delta q_\gamma^i \right) + N_*^i \Delta e_*^i + e_{p,j} - e_{\gamma,j+1} + e_{pp,j+1} + e_{\theta,j+1} + e_{pe,j+1} \\ R_2^i = A_v^t \left(X_j + \sum_i^{N_H} \Delta X^i \right) + Q_{v,j+1} + Q_{p,j+1} \\ R_3^i = -A_\gamma^t \left(X_j + \sum_i^{N_H} \Delta X^i \right) + Q_{\gamma,j+1} - Q_{p,j+1} \\ R_4^i = \Phi_{j+1}^i \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Conforme foi referido, a verificação da condição de escoamento plástico é garantida à partida e as condições de complementaridade referem-se apenas à forma como o modelo elastoplástico deve evoluir, pelo que não é necessária a sua inclusão tanto no cálculo dos restos, como no sistema de equações do método de Newton-Raphson.

O sistema de equações do método de Newton-Raphson é definido de forma a eliminar ou a minimizar os restos. É escrito na forma apresentada em (3.74) para os incrementos das variáveis do sistema governativo. É no entanto necessário incluir um conjunto de equações que permitam definir a evolução dos potenciais plásticos, e não apenas calcular os seus valores no final de cada iteração, como na expressão (3.75). Para este efeito recorre-se à condição de consistência (3.50), que é escrita apenas em função dos incrementos das variáveis. Desta forma obtemos a seguinte definição alternativa para o cálculo no final de cada iteração de (R_4) :

$$R_4^i = \Phi_{*,j} + \Delta\Phi_*^i = \Phi_{*,j} + N_*^t \Delta X_{j+1} - H_* \Delta e_* \quad (3.76)$$

Introduzindo o conjunto de equações anteriores na definição dos restos, obtém-se um sistema de equações determinado e simétrico.

Recordando a noção de diferencial de uma função de várias variáveis indicada no anexo I, define-se o sistema de equações a adoptar em cada iteração, por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^i}{\partial X} & \frac{\partial R_1^i}{\partial q_v} & \frac{\partial R_1^i}{\partial q_\gamma} & \frac{\partial R_1^i}{\partial \Delta e_*} \\ \frac{\partial R_2^i}{\partial X} & \frac{\partial R_2^i}{\partial q} & \frac{\partial R_2^i}{\partial q} & \frac{\partial R_2^i}{\partial \Delta e_*} \\ \frac{\partial R_3^i}{\partial X} & \frac{\partial R_3^i}{\partial q_v} & \frac{\partial R_3^i}{\partial q_\gamma} & \frac{\partial R_3^i}{\partial \Delta e_*} \\ \frac{\partial R_4^i}{\partial X} & \frac{\partial R_4^i}{\partial q_v} & \frac{\partial R_4^i}{\partial q_\gamma} & \frac{\partial R_4^i}{\partial \Delta e_*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^i \\ \Delta q_v^i \\ \Delta q_\gamma^i \\ \Delta(\Delta e_*) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1^i \\ R_2^i \\ R_3^i \\ R_4^i \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Na obtenção das derivadas indicadas nas equações anteriores, o cálculo menos evidente corresponde à derivação do resto (R_1^i) em relação aos esforços generalizados (X) [8].

$$\frac{\partial R_1^i}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}[F X] + \frac{\partial}{\partial X}[N_* \Delta e_*], \quad (3.78)$$

ou seja:

$$\frac{\partial R_1^i}{\partial X} = F + \frac{\partial N_* \Delta e_*}{\partial X} \quad (3.79)$$

Desenvolvendo o segundo termo da equação anterior e omitindo por simplicidade todos os índices, que indicariam tratar-se da iteração (i), obtém-se:

$$\frac{\partial(N_* \Delta e_*)}{\partial(X)} = \frac{\partial\left(\int S_v^t n_{*,j+1} P_* \Delta e_* dV\right)}{\partial(X)} = \frac{\partial\left(\int S_v^t n_{*,j+1} \Delta \varepsilon_* dV\right)}{\partial(X)} = \frac{\partial\left(\int S_v^t \frac{\partial \phi_*}{\partial \sigma_{j+1}} \Delta \varepsilon_* dV\right)}{\partial(X)}. \quad (3.80)$$

Tendo em conta:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial(X^i)} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial(\sigma^i)} \frac{\partial(\sigma^i)}{\partial(X^i)} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial(\sigma^i)} S_v, \quad (3.81)$$

podemos escrever (3.80), na forma [8]:

$$\frac{\partial(N_*^i \Delta e_*^i)}{\partial(X^i)} = M_*^i, \quad (3.82)$$

onde:

$$M_*^i = \int S_v^t \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma_{j+1}^2} S_v \Delta \varepsilon_* dV. \quad (3.83)$$

As restantes derivadas são de cálculo imediato, pelo que a equação (3.77) pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} F+M_*^i & A_v & -A_\gamma & N_*^i \\ A_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \\ (N_*^i)^t & 0 & 0 & -H_*^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^i \\ \Delta q_v^i \\ \Delta q_\gamma^i \\ \Delta(\Delta e_*^i) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1^i \\ R_2^i \\ R_3^i \\ R_4^i \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Usualmente a matriz da equação anterior é denominada por *Hessiana* (\mathbb{H}^i). A expressão (3.84) representa o sistema de equações, a aplicar em cada iteração (i), para um dado incremento de carga (j+1).

3.8.2 - ORGANIZAÇÃO DO SISTEMA GOVERNATIVO

Para ilustrar a organização do sistema governativo, apresenta-se a sua estrutura base para o caso da consola representada na Figura 3-2.

Os operadores e os vectores $(F^{(i)}, A_v^{(i)}, A_\gamma^{(i,j)}, N_*^{(i,m)}, H_*^{(m_1, m_2)}, R_1^{(i)}, R_2^{(i)}, R_3^{(j)}, R_4^{(m)})$ que aparecem nos sistemas de equações (3.85) e (3.86), encontram-se associados aos (elementos, fronteiras, modos de cedência activos) definidos respectivamente pelo índices (i,j,m).

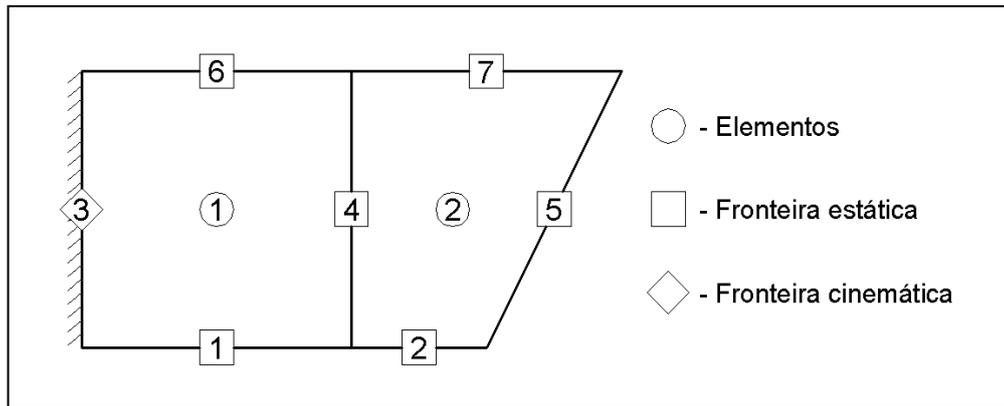


Figura 3-2: Discretização de uma estrutura tipo consola.

O sistema governativo apresentado em (3.85), representa a forma genérica do sistema de equações a adoptar na resolução do problema em regime elástico (3.60):

$$\begin{bmatrix}
 F^{(1)} & \cdot & A_V^{(1)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,1)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,4)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,6)} & \cdot \\
 \cdot & F^{(2)} & \cdot & A_V^{(2)} & \cdot & -A_\gamma^{(2,2)} & -A_\gamma^{(2,4)} & -A_\gamma^{(2,5)} & \cdot & -A_\gamma^{(2,7)} \\
 \hline
 A_V^{t(1)} & \cdot \\
 \cdot & A_V^{t(2)} & \cdot \\
 \hline
 -A_\gamma^{t(1,1)} & \cdot \\
 \cdot & -A_\gamma^{t(2,2)} & \cdot \\
 -A_\gamma^{t(1,4)} & -A_\gamma^{t(2,4)} & \cdot \\
 \cdot & -A_\gamma^{t(2,5)} & \cdot \\
 -A_\gamma^{t(1,6)} & \cdot \\
 \cdot & -A_\gamma^{t(2,7)} & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta X^{(1)} \\
 \Delta X^{(2)} \\
 \hline
 \Delta q_V^{(1)} \\
 \Delta q_V^{(2)} \\
 \hline
 \Delta q_\gamma^{(1)} \\
 \Delta q_\gamma^{(2)} \\
 \Delta q_\gamma^{(4)} \\
 \Delta q_\gamma^{(5)} \\
 \Delta q_\gamma^{(6)} \\
 \Delta q_\gamma^{(7)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 e_\gamma^{(1)} - e_{pp}^{(1)} - e_\theta^{(1)} - e_{pe}^{(1)} \\
 e_\gamma^{(2)} - e_{pp}^{(2)} - e_\theta^{(2)} - e_{pe}^{(2)} \\
 \hline
 -Q_V^{(1)} - Q_p^{(1)} \\
 -Q_V^{(2)} - Q_p^{(2)} \\
 \hline
 -Q_\gamma^{(1)} + Q_{\gamma p}^{(1)} \\
 -Q_\gamma^{(2)} + Q_{\gamma p}^{(2)} \\
 -Q_\gamma^{(4)} + Q_{\gamma p}^{(4)} + Q_{\gamma p}^{(4)} \\
 -Q_\gamma^{(5)} + Q_{\gamma p}^{(5)} \\
 -Q_\gamma^{(6)} + Q_{\gamma p}^{(6)} \\
 -Q_\gamma^{(7)} + Q_{\gamma p}^{(7)}
 \end{bmatrix}
 \tag{3.85}$$

Na expressão (3.86), representa-se a forma genérica do sistema de equações do algoritmo de Newton-Raphson, a adoptar na resolução do problema em regime elastoplástico (3.84). Admite-

se que se encontram activos dois modos de plastificação, um pertencente ao elemento 1 e outro ao elemento 2. Omite-se por simplicidade os índices que indicariam tratar-se da iteração (i).

$$\begin{bmatrix}
 F^{(1)} + M_*^{(1)} & . & A_V^{(1)} & . & -A_\gamma^{(1,1)} & . & -A_\gamma^{(1,4)} & . & -A_\gamma^{(1,6)} & . & N_*^{(1,1)} & . & \Delta X^{(1)} \\
 . & F^{(2)} + M_*^{(2)} & . & A_V^{(2)} & . & -A_\gamma^{(2,2)} & -A_\gamma^{(2,4)} & -A_\gamma^{(2,5)} & . & -A_\gamma^{(2,7)} & . & N_*^{(2,2)} & \Delta X^{(2)} \\
 \hline
 A_V^{t(1)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_V^{(1)} \\
 . & A_V^{t(2)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_V^{(1)} \\
 \hline
 -A_\gamma^{t(1,1)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_\gamma^{(1)} \\
 . & -A_\gamma^{t(2,2)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_\gamma^{(2)} \\
 -A_\gamma^{t(1,4)} & -A_\gamma^{t(2,4)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_\gamma^{(4)} \\
 . & -A_\gamma^{t(2,5)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_\gamma^{(5)} \\
 -A_\gamma^{t(1,6)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_\gamma^{(6)} \\
 . & -A_\gamma^{t(2,7)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta q_\gamma^{(7)} \\
 \hline
 N_*^{t(1,1)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta(\Delta e_*^{(1)}) \\
 . & N_*^{t(2,2)} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \Delta(\Delta e_*^{(2)})
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 R_1^{(1)} \\
 R_1^{(2)} \\
 \hline
 R_2^{(1)} \\
 R_2^{(2)} \\
 \hline
 R_3^{(1)} \\
 R_3^{(2)} \\
 R_3^{(4)} \\
 R_3^{(5)} \\
 R_3^{(6)} \\
 R_3^{(7)} \\
 \hline
 R_4^{(1)} \\
 R_4^{(2)}
 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Salienta-se a definição elementar dos operadores (F) e (A_V), enquanto que (A_γ) é definido para cada deslocamento não impedido das fronteiras estáticas. É neste operador que se faz sentir a ligação entre os elementos, através da partilha da aproximação para o campo de deslocamentos ao longo da fronteira comum. É o caso da fronteira 4 (7ª coluna da matriz do sistema) onde se regista a participação dos dois elementos (A_γ^(1,4), A_γ^(2,4)). Os operadores (N_{*}, H_{*}) e o vector (Δe_{*}), encontram-se definidos no domínio onde é efectuado o controlo de cedência (§4.4) e englobam apenas os modos de plastificação que se encontram activos.

Capítulo 4

Implementação do Modelo

4.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo tem como objectivo apresentar os aspectos relacionados com a implementação do modelo de elementos finitos formulado no capítulo anterior.

Os conceitos e as expressões são apresentados de uma forma genérica, deixando-se para os anexos tudo aquilo que, quer pela sua especificidade em relação a um qualquer tipo de estrutura, quer pela sua dimensão ou carácter de pormenor, se considerou inadequado incluir no corpo do texto deste capítulo. Quando necessário, desenvolveram-se as expressões particularizando-as para o problema de placas (EPT e EPD), devido a ser esta a formulação mais simples, permitindo ilustrar convenientemente os raciocínios e desenvolver as expressões. A generalização para outro tipo de estruturas é facilmente efectuada pelo leitor.

Conforme já foi referido no capítulo de introdução, no âmbito deste trabalho foram desenvolvidos dois programas de cálculo. O primeiro programa, designado por *Laje-Pol*, efectua a análise elástica de lajes espessas (formulação de Reissner-Mindlin), utilizando polinómios como funções de aproximação. A particularização das expressões desenvolvidas neste capítulo para este programa, encontra-se no anexo G. O segundo programa, designado por *Placa-Leg*, efectua a análise elastoplástica de placas, utilizando polinómios de Legendre como funções de aproximação. O controlo da cedência é efectuada por pontos de colocação e/ou por células plásticas. Foram implementados os critérios de cedência de von Mises, de

Drucker-Prager e de Mohr-Coulomb e é possível considerar um patamar de endurecimento isotrópico linear. A particularização das expressões desenvolvidas neste capítulo para este programa pode ser encontrada no anexo H.

Apresentam-se as expressões utilizadas na definição das transformações de coordenadas, a forma como foram definidas as aproximações, as técnicas utilizadas para o controlo da cedência e a definição dos critérios de cedência. Abordam-se também as expressões utilizadas no cálculo dos operadores estruturais, na determinação dos campos de esforços e deslocamentos. Por último, para dar uma visão global sobre o funcionamento do modelo apresentam-se, na forma de diagramas de fluxo, os algoritmos associados ao modelo elastoplástico.

4.2 - TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Conforme já foi referido, neste trabalho implementaram-se elementos com forma trapezoidal definidos por 4 nós. Para permitir a sistematização do cálculo dos operadores e tirar partido da ortogonalidade das funções de aproximação, efectuou-se uma transformação de coordenadas do referencial global (x,y) , para um elemento mestre definido no referencial local (ξ,η) .

Foram implementados dois tipos de elementos mestres: no programa *Placa-Leg* utilizam-se elementos definidos no intervalo $([-1,1])$, enquanto que no programa *Laje-Pol*, se utilizam elementos definidos entre $([0,1])$, (Figura 4-1).

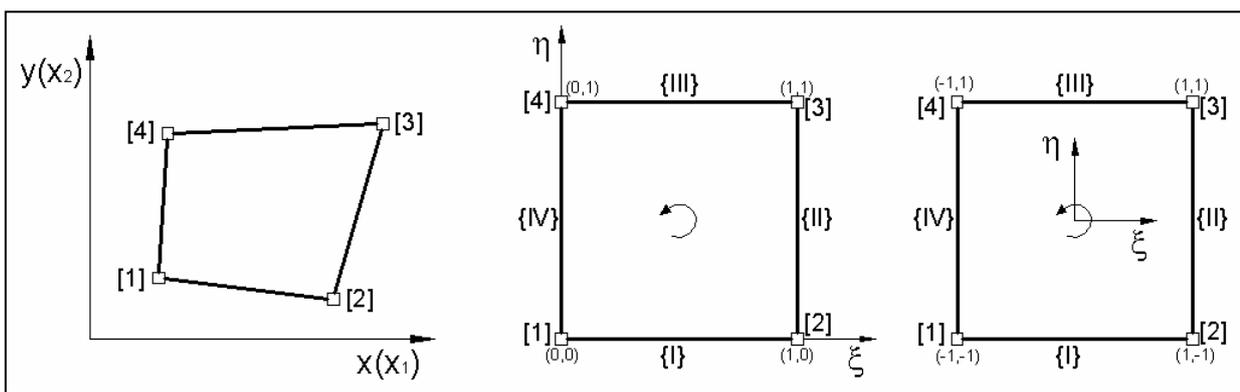


Figura 4-1: Transformação de coordenadas para um elemento genérico trapezoidal de 4 nós.

Para definir a geometria de cada elemento trapezoidal, utilizou-se um procedimento típico dos elementos isoparamétricos tradicionais [66]. Obtém-se então a equação (4.1), definida com base na utilização de funções de interpolação do tipo bilinear (Figura 4-2).

Agrupando os termos presentes na equação (4.1), é possível obter a equação (4.2), que permite relacionar directamente as coordenadas globais com as locais. Para este tipo de

elementos, o cálculo do Jacobiano da transformação pode ser igualmente sistematizado, de acordo com a expressão (4.3):

$$\mathbf{x}_k = \psi_1 \mathbf{x}_k^{[1]} + \psi_2 \mathbf{x}_k^{[2]} + \psi_3 \mathbf{x}_k^{[3]} + \psi_4 \mathbf{x}_k^{[4]}, \quad \text{para } k = \{1,2\}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_k(\xi, \eta) = \mathbf{x}_{0k} + \alpha_k \eta + \beta_k \xi + \gamma_k \xi \eta, \quad \text{para } k = \{1,2\}, \quad (4.2)$$

$$|\mathbf{J}(\xi, \eta)| = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_\xi \xi + \mathbf{J}_\eta \eta, \quad (4.3)$$

onde $(\mathbf{x}_k^{[i]})$ representa a coordenada do nó (i) na direcção (k) e $(\mathbf{x}_{0k}, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \mathbf{J}_0, \mathbf{J}_\xi, \mathbf{J}_\eta)$ são parâmetros escalares definidos com base nas coordenadas dos nós [39].

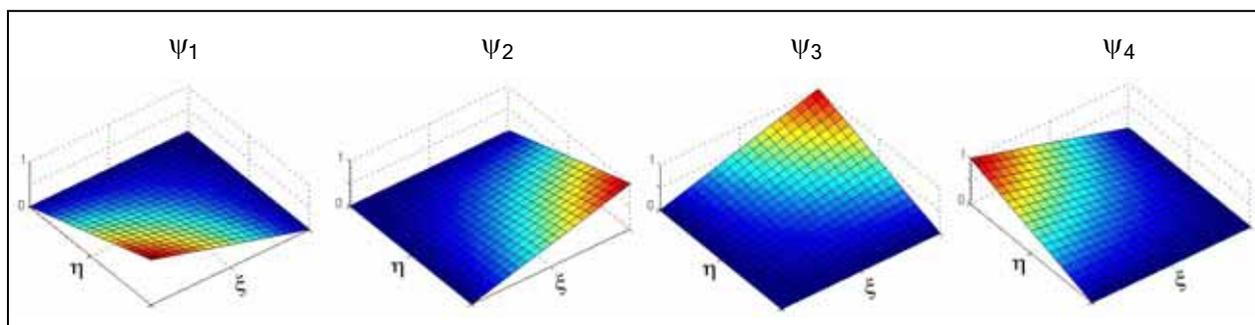


Figura 4-2: Funções de aproximação da geometria do elemento.

Para efectuar o controlo de plasticidade, efectuou-se novamente uma transformação de coordenadas, em tudo semelhante à anterior, entre o referencial local (ξ, η) , onde são efectuados os cálculos dos operadores estruturais, e um referencial (γ, ψ) denominado neste trabalho por *referencial local de plasticidade*, onde se efectua o controlo da cedência.

As expressões necessárias à implementação das transformações de coordenadas, encontram-se definidas com maior rigor no anexo C.

4.3 - DEFINIÇÃO DA APROXIMAÇÃO

As funções de aproximação utilizadas são do tipo polinomial. A construção da aproximação pode ser obtida, no caso de grandezas unidimensionais, agrupando os polinómios por ordem crescente de grau, conforme se indica em (4.4). No caso bidimensional, a construção é resultante do produto tensorial de dois polinómios unidimensionais (4.5), podendo ser agrupados com a sequência indicada em (4.6):

$$[P_0(\gamma) \ P_1(\gamma) \ \dots \ P_n(\gamma)], \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} P_0(\gamma_1) \\ \vdots \\ P_\alpha(\gamma_1) \end{bmatrix} [P_0(\gamma_2) \cdots P_\alpha(\gamma_2)] = \begin{bmatrix} P_0(\gamma_1)P_0(\gamma_2) & P_0(\gamma_1)P_1(\gamma_2) & \cdots & P_0(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_\alpha(\gamma_1)P_0(\gamma_2) & P_\alpha(\gamma_1)P_1(\gamma_2) & \cdots & P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$[P_0(\gamma_1)P_0(\gamma_2) \cdots P_0(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) \cdots P_\alpha(\gamma_1)P_0(\gamma_2) \cdots P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2)]. \quad (4.6)$$

Quanto à organização das matrizes que reúnem as funções de aproximação (S_v, U_v, U_γ) , optou-se por agrupar primeiro todas as funções associadas a cada grandeza aproximada. Estas matrizes são definidas com um número de linhas igual ao número de grandezas aproximadas. Desta forma, a matriz (4.7) representa, por exemplo, o caso da matriz (U_v) para as placas, onde são duas as grandezas aproximadas (u_x, u_y) .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} P_0(\gamma_1)P_0(\gamma_2) & \cdots & P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_0(\gamma_1)P_0(\gamma_2) & \cdots & P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) \end{array} \right]. \quad (4.7)$$

Outras formas de organização são possíveis, influenciando no entanto a distribuição dos termos no sistema governativo. Procurou-se garantir que a organização das matrizes assegure uma distribuição eficiente dos coeficientes não-nulos, nomeadamente através da optimização da proximidade à diagonal principal, conduzindo à minimização das operações a efectuar quando se utilizam técnicas apropriadas para a resolução eficaz do sistema de equações.

Entre as outras possíveis formas de organizar estas matrizes [10, 39], salienta-se o caso onde se agrupa primeiro todas as funções com o mesmo grau, conforme se indica em (4.8) para o mesmo caso apresentado em (4.7).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} P_0(\gamma_1)P_0(\gamma_2) & 0 & \cdots & P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) \\ 0 & P_0(\gamma_1)P_0(\gamma_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) & 0 & \cdots & P_\alpha(\gamma_1)P_\alpha(\gamma_2) \end{array} \right]. \quad (4.8)$$

Neste trabalho utilizaram-se apenas aproximações com polinómios completos. Assim sendo, a dimensão de qualquer uma das matrizes anteriores, é dada para o caso de uma aproximação unidimensional por (4.9), e por (4.10) para o caso bidimensional.

$$[n, n(1 + g_{\max})], \quad (4.9)$$

$$[n, n(1 + g_{\max})^2], \quad (4.10)$$

onde (n) representa o número de grandezas aproximadas, e (g_{\max}) o grau máximo das funções consideradas nessa aproximação.

As funções escolhidas para efectuar as aproximações definidas em (3.1), (3.2) e (3.4), foram no caso do programa *Laje-Pol*, polinómios definidos por:

$$P_i(\gamma) = \gamma^i. \quad (4.11)$$

No programa *Placa-Leg*, utilizaram-se polinómios de Legendre que são as soluções da equação diferencial de Legendre [57]:

$$(1 - \gamma^2) P''(\gamma) - 2 \gamma P'(\gamma) + n(n+1) P(\gamma) = 0. \quad (4.12)$$

Somos conduzidos a funções polinomiais que podem ser geradas recursivamente pela *fórmula de Bonnet*:

$$(n+1)P_{n+1}(\gamma) - (2n+1)\gamma P_n(\gamma) + nP_{n-1}(\gamma) = 0. \quad (4.13)$$

No anexo D abordam-se com maior detalhe os aspectos relacionados com os polinómios de Legendre.

Salienta-se que em qualquer dos casos se perde o conceito de elementos isoparamétricos, pois utilizam-se funções diferentes para aproximar a geometria dos elementos e as grandezas estruturais.

4.4 - CONTROLO DA CEDÊNCIA

Neste trabalho foram utilizadas duas técnicas para o controlo da cedência: o *controlo em pontos de colocação*, e o *controlo em células plásticas*. Para que se verifique localmente a condição de escoamento plástico (2.47) as funções que constituem a base de aproximação (P_*), são escolhidas de forma a apresentarem no seu domínio sempre valores não negativos.

Conforme já foi referido, o controlo da cedência é efectuado num referencial (γ, ψ) , denominado por *referencial local de plasticidade*. É neste referencial que se definem as grandezas associadas ao comportamento elastoplástico, como os potenciais plásticos (Φ_*), os incrementos dos parâmetros plásticos (Δe_*) e o operador (N_*). Esta segunda mudança de coordenadas foi efectuada por duas razões: em primeiro lugar se tivermos as células plásticas definidas em intervalos $([-1,1])$ a implementação dos métodos de integração numérica (quadratura de Gauss ou de Lobatto) é facilitada e directa (Figura 4-4). A segunda razão está relacionada com questões de coerência e de uniformidade nos procedimentos de cálculo, nomeadamente no cálculo dos operadores estruturais.

4.4.1 - CONTROLO EM PONTOS DE COLOCAÇÃO

No método de controlo com base em pontos de colocação, a plasticidade é controlada de uma forma pontual. Foram utilizadas *funções de Dirac* ($\hat{\delta}(\gamma, \psi)$) [8], como funções de aproximação

dos incrementos dos parâmetros plásticos (P_*). Cada uma destas funções é definida num ponto de forma a que ao se efectuar o integral num dado domínio, da função de Dirac multiplicada por outra função, obtém-se como resultado o valor nesse ponto da segunda função. Assim sendo, para cada modo de cedência (m), o potencial plástico generalizado (Φ_*) está apenas associado a um ponto (γ_0, ψ_0) do domínio (Figura 4-3a), tomando o valor da função dos potenciais plásticos nesse ponto,

$$\Phi_*^m = \phi_*(\gamma_0, \psi_0). \quad (4.14)$$

Considerou-se a possibilidade dos pontos de colocação se localizarem em $(n \times n)$ de *pontos de Gauss* e de *Lobatto* , e num conjunto de pontos equidistantes.

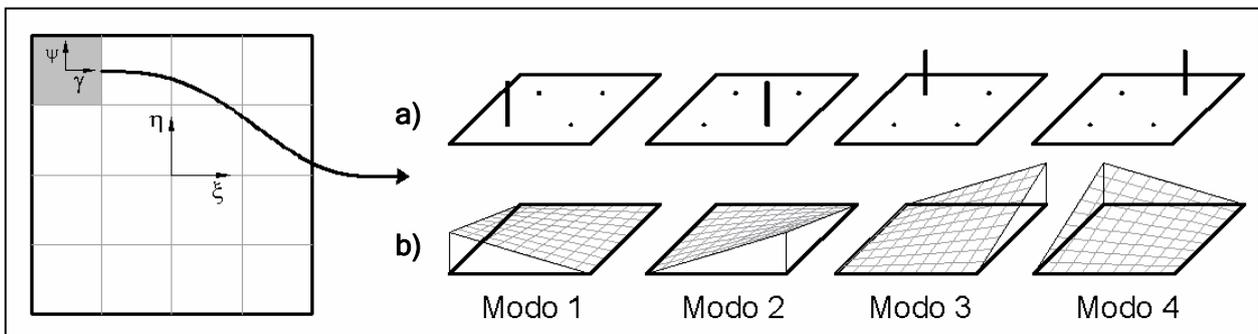


Figura 4-3: Técnicas de controlo da cedência.

4.4.2 - CONTROLO EM CÉLULAS PLÁSTICAS

No controlo em células plásticas, foram implementados três conjuntos de funções de aproximação para os parâmetros plásticos (P_*). O primeiro consiste na consideração de uma única função constante de valor unitário. O segundo conjunto foi definido utilizando quatro funções do mesmo tipo das utilizadas na aproximação da geometria do elemento (Figura 4.3b). Por último, considerou-se também um conjunto de 9 funções obtidas do produto nas duas direcções de polinómios de segundo grau. Todas estas funções encontram-se definidas no anexo F.

O valor do potencial plástico (Φ_*) associado ao modo (m), pode ser calculado através de:

$$\Phi_*^m = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (P_*^m(\gamma, \psi))^t \phi_*(\gamma, \psi) |J(\gamma, \psi)| |J'| d\psi d\gamma, \quad (4.15)$$

onde $(|J(\gamma, \psi)|)$ representa o Jacobiano de transformação de coordenadas entre o referencial global e o local, enquanto que $(|J'|)$ representa o Jacobiano de transformação de coordenadas entre o referencial local e local de plasticidade (Figura 4-4). Da análise da Figura 4-4 facilmente

se conclui que o Jacobiano ($|J'|$) não depende das coordenadas (γ, ψ) , pois toma um valor constante igual à relação entre as áreas do elemento no referencial local ($2 \times 2 = 4$) e a área da célula plástica no referencial local de plasticidade.

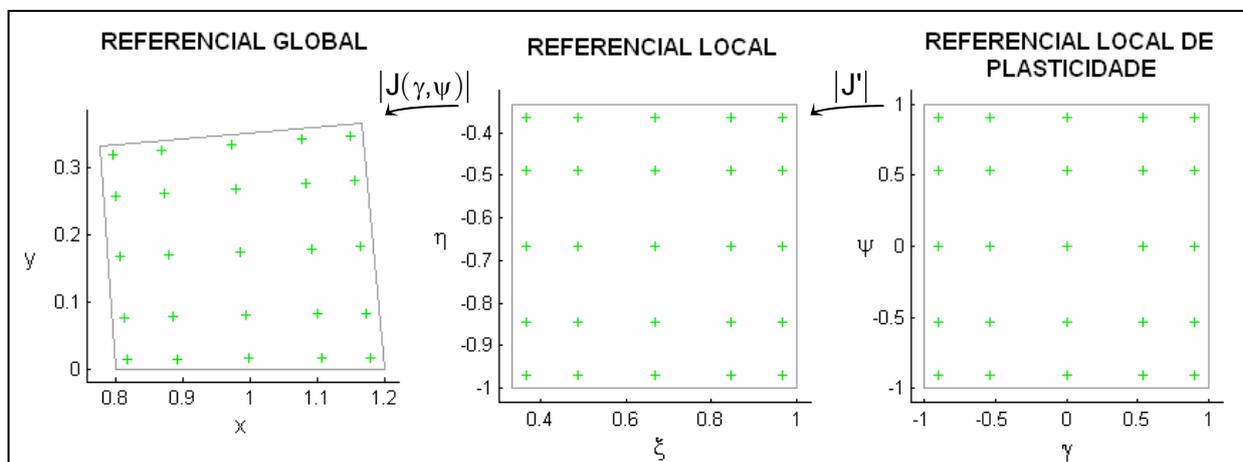


Figura 4-4: Representação de uma célula plástica e dos pontos de integração, nos diversos referenciais considerados.

A expressão (4.15) foi calculada numericamente, pois não é geralmente possível definir matematicamente a forma como variam os potenciais plásticos no domínio célula plástica. Para efectuar a integração, utilizou-se o método da quadratura de Gauss ou o método da quadratura de Lobatto [39], obtendo-se:

$$\Phi_*^k = \sum_1^n \sum_1^n [P_*^k(\gamma, \psi) \phi_*(\gamma, \psi) W' |J(\gamma, \psi)| |J'|], \quad (4.16)$$

onde (n) representa o número de pontos em cada direcção e (W') representa o peso associado a cada ponto para a quadratura considerada.

4.5 - CRITÉRIOS DE CEDÊNCIA

O comportamento dos materiais pode ser agrupado em dois grandes grupos: *materiais isotrópicos* e *materiais anisotrópicos*. Os materiais isotrópicos podem ainda ser classificados em *materiais insensíveis à pressão hidrostática*, caso da maioria dos metais, e *materiais sensíveis à pressão hidrostática*, como os solos e o betão.

Diversos modelos foram desenvolvidos para caracterizar a cedência deste tipo de materiais. Entre os mais simples encontram-se o *critério de Tresca* [60], o *critério de von Mises* [64], para os materiais insensíveis à pressão hidrostática, o *critério de Mohr-Coulomb* [16] e o *critério de Drucker-Prager* [19], para os materiais sensíveis à pressão hidrostática.

Refira-se que embora para materiais com comportamento frágil, como o betão e os solos, faça mais sentido em falar de critérios de rotura e não em critérios de cedência, neste trabalho considerou-se que este tipo de materiais apresenta um comportamento elastoplástico do tipo dúctil, possibilitando a utilização do conceito de cedência.

Um dos objectivos deste trabalho consiste em incorporar critérios de cedência que considerem a resistência combinada de atrito e coesão. Assim sendo, para além do critério de von Mises, foram implementados os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager.

O critério de cedência de Mohr-Coulomb dá origem a superfícies de cedência com descontinuidades, podendo originar problemas numéricos ao modelo, devido a existirem pontos no espaço de tensões onde a normal à superfície de cedência não toma um valor único (Figura 4-5).

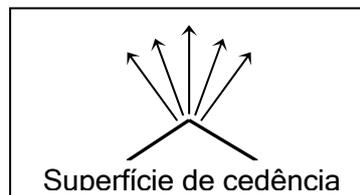


Figura 4-5: Problemas na definição das normais à superfície de cedência.

O critério de Drucker-Prager pode ser calibrado para se aproximar do critério de Mohr-Coulomb. Este critério é na maioria das situações preferível, pois tem uma definição matemática mais atraente, permitindo contornar os problemas nas arestas.

Em seguida apresenta-se a definição genérica dos critérios de cedência incorporados no programa *Placa-Leg*, deixando para o anexo E a sua definição matemática mais pormenorizada.

4.5.1 - CRITÉRIO DE VON MISES

Este critério, inicialmente proposto por von Mises em 1913 [64], considera que a cedência ocorre quando a tensão tangencial octaédrica (E.8) atinge o valor de $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_{\tau}\right)$, onde (k_{τ}) representa a tensão de cedência num estado de corte puro, ou seja num estado de tensão onde o primeiro invariante do tensor das tensões seja nulo ($I_1 = 0$). Matematicamente, este critério fica definido por:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}J_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}k_{\tau}, \quad (4.17)$$

ou:

$$J_2 = k_{\tau}^2. \quad (4.18)$$

No espaço das tensões principais, este critério fica definido por um prisma com uma elipse como base, e com o eixo ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) como geratriz (Figura 4-6 a).

O critério de von Mises considera que a cedência do material depende apenas do segundo invariante do tensor das tensões deviatóricas (J_2), não estando relacionada com a pressão hidrostática instalada (I_1).

Calibrando o parâmetro (k_τ) de modo a que a tensão de cedência num ensaio de tracção puro ($\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$) tome o valor (σ_{ced}), obtém-se:

$$k_\tau = \frac{\sigma_{ced}}{\sqrt{3}}. \quad (4.19)$$

Introduzindo a relação anterior em (4.18), obtém-se a definição mais usual do critério de von Mises [13, 67]:

$$f(J_2, \sigma_{ced}) = \sqrt{3J_2} - \sigma_{ced} = 0. \quad (4.20)$$

4.5.2 - CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB

Inicialmente, o critério proposto por Mohr em 1900, era baseado na hipótese de que o factor decisivo para a cedência do material, seria o valor máximo da tensão tangencial. Posteriormente, considerou que a envolvente de cedência é definida por uma recta, tendo introduzido a equação de Coulomb de 1773, dando origem à expressão matemática mais usual para o critério de Mohr-Coulomb [16]:

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg}(\phi), \quad (4.21)$$

onde (c) representa a coesão e (ϕ) o ângulo de atrito interno do material, ambos usualmente determinados por via experimental [13].

No espaço das tensões principais, este critério fica definido por uma pirâmide com base hexagonal e com o eixo ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) como geratriz (Figura 4-6 b).

Definindo este critério como uma função de cedência, recorrendo ao primeiro invariante do tensor das tensões (I_1), ao segundo invariante do tensor das tensões deviatóricas (J_2), e ao ângulo de Lode (θ) [32], obtemos a expressão utilizada para definir o critério de Mohr-Coulomb [13]:

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{I_1}{3} \operatorname{sen}(\phi) + \sqrt{J_2} \cos(\theta) - \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) - c \cos(\phi) = 0. \quad (4.22)$$

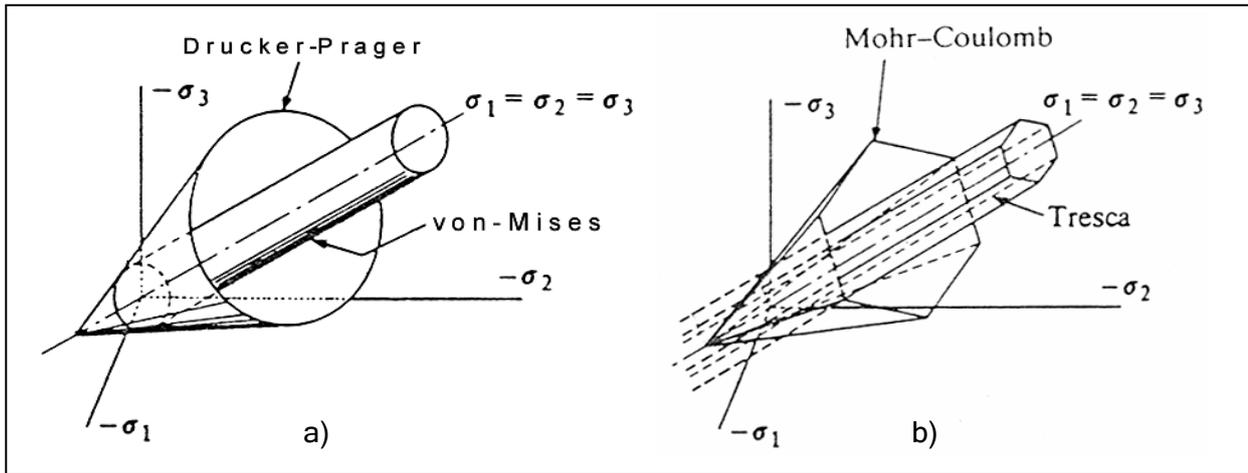


Figura 4-6: Representação gráfica dos critérios de cedência (adaptado de [13] e [67]).

4.5.3 - CRITÉRIO DE DRUCKER-PRAGER

O critério de Drucker-Prager foi inicialmente formulado em 1952 [19], resultando da modificação do critério de von Mises, de forma a incluir o efeito da pressão hidrostática, Figura 4-6-a):

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0, \quad (4.23)$$

onde (α) e (k) são constantes que caracterizam o material, determinados de forma a que a superfície cônica associada ao critério de Drucker-Prager, representada no espaço das tensões principais, circunscreva a pirâmide hexagonal do critério de Mohr-Coulomb, Figura 4-7.

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}(\phi))}; \quad k = \frac{6 c \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}(\phi))}. \quad (4.24)$$

No espaço das tensões principais, este critério fica definido por um prisma em forma de cone com uma elipse como base, e com o eixo $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ como geratriz.

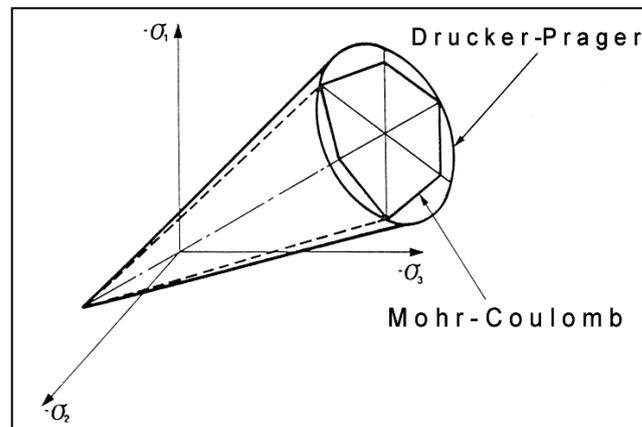


Figura 4-7: Comparação entre o critério de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager, (adaptado de [13]).

4.6 - CÁLCULO DOS OPERADORES ESTRUTURAIS

4.6.1 - OPERADOR DE FLEXIBILIDADE (F)

De acordo com o modelo de elementos finitos, o operador de flexibilidade é calculado para cada elemento finito (e), através da expressão:

$$F^e = \int (S_v^e)^t f^e S_v^e dV.$$

Efectuando a transformação de coordenadas para o elemento mestre definido no referencial local (ξ, η) , a definição do operador irá englobar o Jacobiano da transformação:

$$F^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (S_v^e(\xi, \eta))^t f^e S_v^e(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (4.25)$$

Desta forma, o cálculo de um termo genérico do operador de flexibilidade, associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i, j, m, n) e ao termo (f_{kl}) da matriz que reúne os parâmetros elásticos, pode ser efectuado a partir de:

$$F^e(i, j, k, l, m, n) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i^e(\xi) P_j^e(\eta) f_{kl}^e P_m^e(\xi) P_n^e(\eta) |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (4.26)$$

4.6.2 - OPERADOR DE COMPATIBILIDADE NO DOMÍNIO (A_v)

Conforme foi visto anteriormente, para o elemento finito (e) o operador de compatibilidade no domínio, é definido pela expressão:

$$A_v^e = \int (D^e S_v^e)^t U_v^e dV.$$

Para efectuar a transformação de coordenadas para o elemento mestre, introduz-se um procedimento semelhante ao anterior. No entanto, é necessário calcular a relação entre o operador de equilíbrio definido no sistema de coordenadas globais (x, y) , e o mesmo operador definido nas coordenadas locais (ξ, η) .

Recorrendo à regra da derivação da função composta (4.27), podemos relacionar para cada elemento finito, as derivadas parciais associadas às coordenadas globais, com as derivadas associadas às coordenadas locais:

$$\frac{\partial()}{\partial \gamma} = \frac{\partial()}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \frac{\partial()}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}, \quad (4.27)$$

definindo-se o novo operador de equilíbrio ($D(\xi, \eta)$), da seguinte forma:

$$D(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial()}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & \frac{\partial()}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial()}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial()}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial()}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial()}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Tendo em atenção que os termos $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$ da expressão anterior podem ser calculados com base nas expressões associadas à inversa da transformação de coordenadas utilizada na definição da geometria do elemento, é possível relacionar as derivadas nos dois sistemas de coordenadas, através de:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} \\ \frac{\partial()}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial \xi} \\ \frac{\partial()}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

onde:

$$J^{-1} = \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Desta forma, de acordo com as expressões apresentadas no anexo C para os elementos trapezoidais, o operador diferencial de equilíbrio pode ser definido através de:

$$D(x, y) = \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} D(\xi, \eta), \quad (4.31)$$

onde:

$$D(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & 0 & -\alpha_1 - \gamma_1 \xi \\ 0 & -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \alpha_2 + \gamma_2 \xi \end{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} \beta_2 + \gamma_2 \eta & 0 & -\beta_1 - \gamma_1 \eta \\ 0 & -\beta_1 - \gamma_1 \eta & \beta_2 + \gamma_2 \eta \end{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial \eta}, \quad (4.32)$$

Num formato mais compacto, podemos definir:

$$D^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} D_1(\xi, \eta) & 0 & D_2(\xi, \eta) \\ 0 & D_2(\xi, \eta) & D_1(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

onde:

$$\begin{cases} D_1(\xi, \eta) = (\alpha_2 + \gamma_2 \xi) \frac{\partial()}{\partial \xi} - (\beta_2 + \gamma_2 \eta) \frac{\partial()}{\partial \eta} \\ D_2(\xi, \eta) = (-\alpha_1 - \gamma_1 \xi) \frac{\partial()}{\partial \xi} - (-\beta_1 - \gamma_1 \eta) \frac{\partial()}{\partial \eta} \end{cases}. \quad (4.34)$$

O operador de compatibilidade no domínio pode então ser definido no referencial local (ξ, η) , através de:

$$A_v^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{|J^e(\xi, \eta)|} D^e(\xi, \eta) S_v^e(\xi, \eta) \right)^t U_v^e(\xi, \eta) |J^e(\xi, \eta)| d\eta d\xi, \quad (4.35)$$

Eliminando os termos referentes aos *Jacobianos*, o cálculo de um termo genérico do operador de compatibilidade, associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i, j, m, n) , e ao termo do operador de equilíbrio (D_k^e) definido em (4.34), pode ser efectuado através de:

$$A_v^e(i, j, k, m, n) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_k^e(\xi, \eta) P_i^e(\xi) P_j^e(\eta))^t P_m^e(\xi) P_n^e(\eta) d\eta d\xi. \quad (4.36)$$

4.6.3 - OPERADOR DE COMPATIBILIDADE NA FRONTEIRA (A_γ)

De acordo com o capítulo relativo ao modelo de elementos finitos, o operador de compatibilidade na fronteira associado ao elemento finito (e) e à fronteira estática (f) é calculado através de:

$$A_\gamma^{(e,f)} = \int (N^f S_v^e)^t U_\gamma^f d\Gamma_\sigma.$$

Necessitamos calcular a relação entre a matriz que reúne as componentes das normais exteriores, definidas no sistema de coordenadas globais (x, y) e definidas em coordenadas locais (ξ, η) .

Prova-se que [39]:

$$\begin{bmatrix} n_x(\xi, \eta) \\ n_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = (J)^{-1}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| \begin{bmatrix} n_\xi \\ n_\eta \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Atendendo a que:

$$(J)^{-1}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

a expressão (4.37) pode ser rescrita na forma:

$$\begin{bmatrix} n_x(\xi, \eta) \\ n_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_\xi \\ n_\eta \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

De acordo com as expressões apresentadas para os elementos trapezoidais no anexo C, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} n_x(\xi, \eta) \\ n_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & -\beta_2 - \gamma_2 \eta \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \beta_1 + \gamma_1 \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_\xi \\ n_\eta \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

Como as normais exteriores obtidas pela expressão (4.40) não são unitárias, é necessário dividi-las pela sua norma, obtida de:

$$\|n(\xi, \eta)\| = \sqrt{n_x^2(\xi, \eta) + n_y^2(\xi, \eta)}, \quad (4.41)$$

ficando o operador de compatibilidade na fronteira definido por:

$$A_\gamma = \int_{-1}^1 \left(\frac{N^f(\xi, \eta)}{(\sqrt{n_x^2(\xi, \eta) + n_y^2(\xi, \eta)})^f} S_V^e(\xi, \eta) \right)^t U_\gamma^f(\gamma) |J(\gamma)| d\gamma, \quad (4.42)$$

onde:

$$N^f = \begin{bmatrix} n_x(\xi, \eta) & 0 & n_y(\xi, \eta) \\ 0 & n_y(\xi, \eta) & n_x(\xi, \eta) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Tendo em conta que o Jacobiano da transformação de coordenadas, pode ser obtido de:

$$|J(\gamma)| = \sqrt{n_x^2(\xi, \eta) + n_y^2(\xi, \eta)}, \quad (4.44)$$

o operador de compatibilidade pode ser definido por:

$$A_\gamma^{(e,f)} = \int_{-1}^1 (N^f(\xi, \eta) S_V^e(\xi, \eta))^t U_\gamma^f(\gamma) d\gamma, \quad (4.45)$$

Um termo genérico do operador, associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i, j, m) e associado à normal exterior $(n_k(\xi, \eta))$, pode ser calculado através de:

$$A_\gamma^{(e,f)}(k, i, j, m) = \int_{-1}^1 (n_k^f(\xi, \eta) P_i^e(\xi) P_j^e(\eta))^t P_m^f(\gamma) d\gamma. \quad (4.46)$$

4.6.4 - CÁLCULO DO OPERADOR (N_*)

De acordo com o capítulo relativo ao modelo de elementos finitos, o operador (N_*) é calculado para o elemento (e) e para o modo de cedência (m), por:

$$N_*^{(e,m)} = \int (S_V^e)^t n_*^m P_*^m dV.$$

As expressões para o cálculo das normais à superfície dos potenciais plásticos (n_*), encontram-se definidas no anexo E para as diversas condições de cedência consideradas.

Salienta-se o facto de o operador (N_*) não se encontrar definido no elemento, mas sim nos pontos de colocação ou nas células plásticas. Apenas é necessário calcular este operador para os modos de cedência activos.

No caso do controlo da cedência ser efectuado com base em células plásticas, efectua-se a transformação de coordenadas para o elemento mestre definido no referencial local de plasticidade (γ, ψ).

O termo genérico associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i, j), ao termo (k) do vector das normais exteriores, ao elemento (e) e ao modo de cedência (m), é calculado através de:

$$N_*^{(e,m)}(i,j,k) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i^e(\gamma) P_j^e(\psi) n_{*,k}(\gamma, \psi) P_*^m(\gamma, \psi) |J(\gamma, \psi)| |J'| d\psi d\gamma. \quad (4.47)$$

Mais uma vez, devido a não ser possível definir matematicamente a forma como varia na célula plástica o vector das normais exteriores à superfície de cedência (n_*), as integrações definidas em (4.47) foram efectuados numericamente, recorrendo-se para tal aos métodos de quadratura de Gauss ou de Lobatto, através do somatório duplo:

$$N_*^m(i,j,k,m) = \sum_1^n \sum_1^n [P_i^e(\gamma) P_j^e(\psi) n_{*,k}(\gamma, \psi) P_*^m(\gamma, \psi) W' |J(\gamma, \psi)| |J'|], \quad (4.48)$$

onde (n) representa o número de pontos em cada direcção e (W') representa o peso associado a cada ponto para a quadratura considerada.

No caso do controlo da cedência ser efectuado com base em pontos de colocação, a cada modo de cedência está apenas associado a um ponto do domínio (γ_0, ψ_0). Assim sendo, um termo genérico associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i, j), ao termo (k) do vector das normais exteriores, e ao modo (m), por:

$$N_*^m(i,j,k,m) = P_i^e(\gamma_0) P_j^e(\psi_0) n_{*,k}(\gamma_0, \psi_0) P_*^m(\gamma, \psi). \quad (4.49)$$

4.6.5 - CÁLCULO DO OPERADOR (H_*)

De acordo com o capítulo relativo ao modelo de elementos finitos, o operador (H_*) é definido para os modos de cedência (m) e (n) , por:

$$H_*^{(m,n)} = \int (P_*^m)^t h_* P_*^n dV.$$

Este operador encontra-se também definido no domínio dos pontos de colocação ou das células plásticas, e mais uma vez, é apenas necessário efectuar o cálculo para os modos de cedência activos.

Desenvolvendo um raciocínio semelhante ao efectuado para o operador (N_*) , obtém-se para um termo genérico associado aos modos de cedência (m) e (n) , a seguinte expressão:

$$H_*^{(m,n)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_*^m(\gamma, \psi) h_* P_*^n(\gamma, \psi) |J(\gamma, \psi)| |J'| d\psi d\gamma. \quad (4.50)$$

Neste trabalho apenas se considera endurecimento do tipo isotrópico, definido recorrendo exclusivamente a troços lineares. Desta forma o termo (h_*) , definido em função do parâmetro de endurecimento (e_p) de acordo com a expressão apresentada em (2.40), é constante, podendo ser definido pelo *módulo de plasticidade* (H') apresentado em (2.32).

Desta forma, a expressão (4.50) pode ser simplificada obtendo-se:

$$H_*^{(m,n)} = H' \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_*^m(\gamma, \psi) P_*^n(\gamma, \psi) |J(\gamma, \psi)| |J'| d\psi d\gamma. \quad (4.51)$$

No caso do controlo da cedência ser efectuado em pontos de colocação, o cálculo do operador pode ser efectuado recorrendo a:

$$H_*^{(m,n)} = H' P_*^m(\gamma, \psi) P_*^n(\gamma, \psi). \quad (4.52)$$

4.6.6 - CÁLCULO DO OPERADOR (M_*)

De acordo com o capítulo relativo ao modelo de elementos finitos, o operador (M_*) é calculado para o elemento finito (e) , através da expressão:

$$M_*^e = \int (S_v^e)^t \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} S_v^e \Delta \epsilon_* dV.$$

Este operador traduz o efeito das deformações plásticas que se desenvolvem durante o processo iterativo no operador de flexibilidade generalizado. Caso não fosse tido em conta, as relações constitutivas permaneceriam inalteradas, independentemente das deformações plásticas que se fossem desenvolvendo durante todo o processo iterativo.

A sua implementação tem dois inconvenientes para o modelo numérico: em primeiro lugar irá destruir a esparsidade do operador (F), visto não ser possível estabelecer nenhuma relação de ortogonalidade, conduzindo a uma matriz cheia. Em segundo lugar não é possível definir expressões analíticas para o seu cálculo, sendo necessário recorrer a procedimentos de integração numérica.

No entanto, o cálculo e a implementação deste operador em cada iteração são dispensáveis. O modelo assim definido pode ser visto como a utilização do método de Newton-Raphson modificado (Figura 4-8b), tendo a vantagem de ser mais eficiente do ponto de vista numérico (maior esparsidade) e bastante menos exigente computacionalmente, mesmo no caso de conduzir a um maior número de iterações.

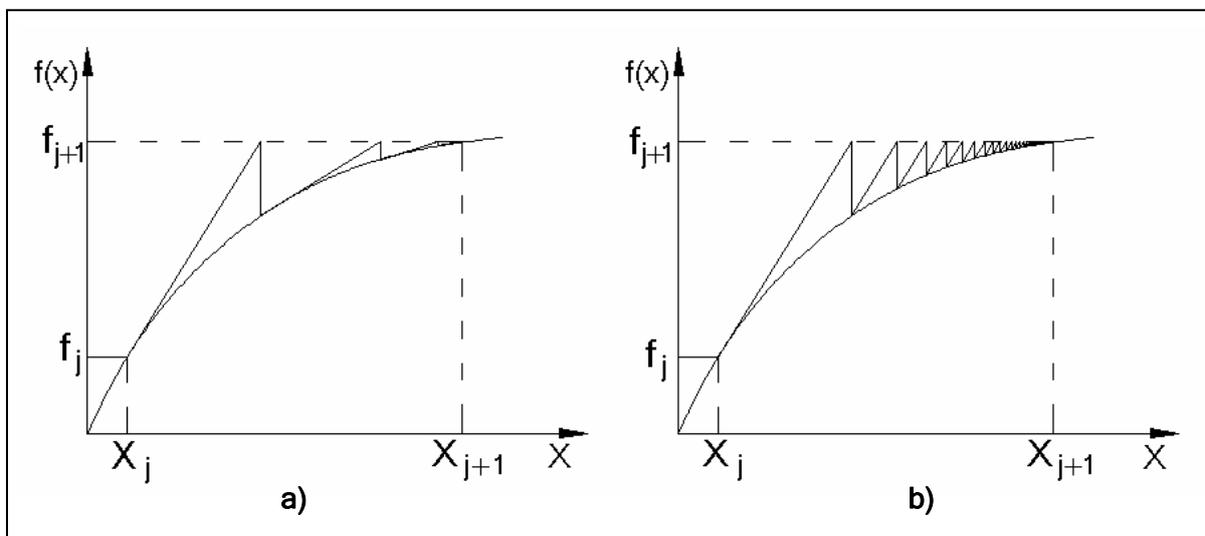


Figura 4-8: Representação esquemática do método de Newton-Raphson e do método de Newton-Raphson modificado.

Neste trabalho optou-se por não implementar o operador (M_*). No entanto, para que este capítulo apresente de forma completa todos os aspectos relacionados com a implementação do modelo de elementos finitos apresentado no terceiro capítulo, optou-se por apresentar o desenvolvimento da expressão que permite o seu cálculo.

Aplicando à definição (3.83) a transformação de coordenadas para o elemento mestre definido no referencial local (ξ, η) , o cálculo do operador pode ser efectuado através da expressão:

$$M_*^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (S_v^e(\xi, \eta))^t \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} S_v^e(\xi, \eta) \Delta \varepsilon_* |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (4.53)$$

As matrizes associadas às segundas derivadas dos potenciais plásticos, encontram-se definidas no anexo E para as diversas condições de cedência consideradas.

Introduzindo a definição (3.3), obtém-se:

$$M_*^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (S_v^e(\xi, \eta))^t \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} S_v^e(\xi, \eta) P_* \Delta e_* |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (4.54)$$

Desta forma, o cálculo de um termo genérico do operador, associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i,j,m,n), ao termo (q) da matriz das segundas derivadas dos potenciais plásticos, é calculado a partir de:

$$M_*^e(i, j, m, n, q) = \sum_k \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i^e(\xi) P_j^e(\eta) \left(\frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} \right)_q P_m^e(\xi) P_n^e(\eta) P_*^k \Delta e_*^k |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi \right], \quad (4.55)$$

onde k se encontra associado a todos os modos de cedência activos no elemento (e).

Mais uma vez, devido a não ser possível definir matematicamente uma expressão para a variação no domínio do elemento dos termos das segundas derivadas dos potenciais plásticos, as integrações definidas em (4.55) teriam de ser efectuadas numericamente, recorrendo por exemplo aos métodos de quadratura de Gauss ou de Lobatto.

4.6.7 - VECTOR DAS FORÇAS DE MASSA GENERALIZADAS (Q_v)

Conforme foi visto, o vector das forças de massa generalizadas é definido por:

$$Q_v^e = \int (U_v^e)^t b dV,$$

podendo ser calculado recorrendo à transformação de coordenadas para o referencial local definida pela expressão (4.56):

$$Q_v^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (U_v^e)^t b |J(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (4.56)$$

O termo genérico de (Q_v), associado às funções de aproximação definidas pelos índices (i,j) e à componente (b_k) do vector das forças de massa, pode ser calculado através de:

$$Q_v^e(i,j,k) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i^e(\xi) P_j^e(\eta) b_k |J(\xi,\eta)| d\eta d\xi . \quad (4.57)$$

4.6.8 - VECTOR DAS FORÇAS NA FRONTEIRA GENERALIZADAS (Q_γ)

O vector das forças na fronteira generalizadas é calculado através de::

$$Q_\gamma^f = \int (U_\gamma^f)^t t_\gamma d\Gamma_\sigma,$$

podendo ser calculado recorrendo à transformação de coordenadas para o referencial local definida pela expressão (4.58):

$$Q_\gamma^f = \int_{-1}^1 (U_\gamma^f)^t t_\gamma |J(\gamma)| d\gamma. \quad (4.58)$$

Atendendo à definição (4.44), o termo genérico de (Q_γ), associado à função de aproximação definida pelo índice (m) e à componente ($t_{\gamma,k}$) do vector das forças na fronteira, pode ser calculado através de:

$$Q_\gamma^f(m,k) = \int_{-1}^1 P_m(\xi) t_{\gamma,k} \sqrt{n_x^2(\xi,\eta) + n_y^2(\xi,\eta)} d\gamma. \quad (4.59)$$

4.7 - CÁLCULO DOS CAMPOS DE TENSÕES E DESLOCAMENTOS

Os campos de tensões (σ) no elemento finito (e) são calculados através da aproximação (3.1). Assim sendo, para um ponto (ξ,η) do domínio do elemento mestre, obtém-se:

$$\sigma^e(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{g_s} \sum_{j=0}^{g_s} [P_i^e(\xi) P_j^e(\eta) X^e(i,j)] + \sigma_p^e(\xi,\eta), \quad (4.60)$$

onde ($X^e(i,j)$) representa o peso associado às funções de aproximação do campo de esforços de índices (i) e (j), e (g_s) representa o grau máximo das funções.

Os campos de deslocamentos (u_v) no domínio do elemento finito (e) são calculados através da aproximação (3.2). Desta forma, para um ponto (ξ,η) do elemento mestre, obtém-se:

$$u_v^e(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{g_{uv}} \sum_{j=0}^{g_{uv}} [P_i^e(\xi) P_j^e(\eta) q_v^e(i,j)] + u_p^e(\xi,\eta), \quad (4.61)$$

onde ($q_v^e(i,j)$) representa o peso associado às funções de aproximação do campo de deslocamentos no domínio de índices (i) e (j), e (g_{uv}) representa o grau máximo das funções.

Os campos de deslocamentos nas fronteiras estáticas (u_γ), são calculados através da aproximação (3.4). Desta forma, para um ponto (γ) da fronteira (f), obtém-se:

$$u_v^f(\gamma) = \sum_{i=0}^{g_{u\gamma}} [P_i^f(\gamma) q_\gamma^f(i)], \quad (4.62)$$

onde ($q_\gamma^f(i)$) representa o peso associado à função de aproximação do campo de deslocamentos na fronteira de índice (i), e ($g_{u\gamma}$) representa o grau máximo das funções.

4.8 - ALGORITMO DO MODELO ELASTOPLÁSTICO

Neste sub-capítulo abordam-se as questões relacionadas com o funcionamento do algoritmo elastoplástico. É discutida a forma adoptada para a definição do incremento de carga, o processo de inicialização e actualização de variáveis, o critério de convergência adoptado para o processo iterativo e são por fim apresentados os diagramas de fluxo do algoritmo elastoplástico.

Conforme já foi referido, é conveniente não ter incrementos de carga muito grandes, pois caso contrário os erros consequentes da utilização do método implícito de Euler poderão influenciar a qualidade da solução. Outra restrição à dimensão do passo de carga é a necessidade de se obter convergência ou que o número de iterações necessárias não seja muito elevado.

No programa *Placa-Leg* não se implementou nenhum algoritmo de estimativa do erro, pelo que a definição do incremento de carga foi feita através da análise do esforço de convergência. Assim sendo, implementou-se um algoritmo que permite definir automaticamente o incremento de carga, tendo em consideração o número de iterações necessárias à convergência em passos anteriores. Caso o número de iterações ultrapasse o desejado, é também possível definir regras para a subdivisão do actual incremento de carga.

No início do passo de carga ($j+1$), as variáveis são inicializadas com os valores do final do passo de carga anterior, à excepção dos incrementos dos parâmetros plásticos que são inicializados com valor nulo, pois referem-se exclusivamente ao passo de carga em questão:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{j+1}^0 = X_j \\ q_{v,j+1}^0 = q_{v,j} \\ q_{\gamma,j+1}^0 = q_{\gamma,j} \\ \Delta e_{*,j+1}^0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.63)$$

No final da iteração (N_{it}) a solução final pode ser obtida de:

$$\left\{ \begin{array}{l} X^i = X_j + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta X^i \\ q_v^i = q_{v,j} + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta q_v^i \\ q_\gamma^i = q_{\gamma,j} + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta q_\gamma^i \\ \Delta e_*^i = \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta(\Delta e_*^i) \end{array} \right. \quad (4.64)$$

No programa *Placa-Leg* optou-se por considerar que foi atingida a convergência quando o maior valor absoluto dos restos das variáveis é inferior a uma dada tolerância (Tol_R), tão pequena quanto se queira:

$$|\{R_1^i, R_2^i, R_3^i, R_4^i\}| \leq Tol_R. \quad (4.65)$$

Outra tolerância que é necessária definir, podendo condicionar fortemente a convergência do processo iterativo, diz respeito ao valor do zero numérico na determinação dos modos de cedência que se encontram activos e inactivos. Neste trabalho utilizou-se a seguinte expressão para determinar se o modo de cedência (m) se encontra inactivo:

$$\Phi^m \leq -Tol_Phi, \text{ com } Tol_Phi \geq 0, \quad (4.66)$$

todos os modos que não verifiquem esta condição, são considerados activos.

Nas Figuras 4-9 e 4-10 procura-se ilustrar através de diagramas de fluxo, o algoritmo utilizado para a implementação do modelo de elementos finitos. A primeira destas Figuras refere-se à implementação dos incrementos de carga, enquanto que a segunda se refere exclusivamente ao algoritmo iterativo do programa.

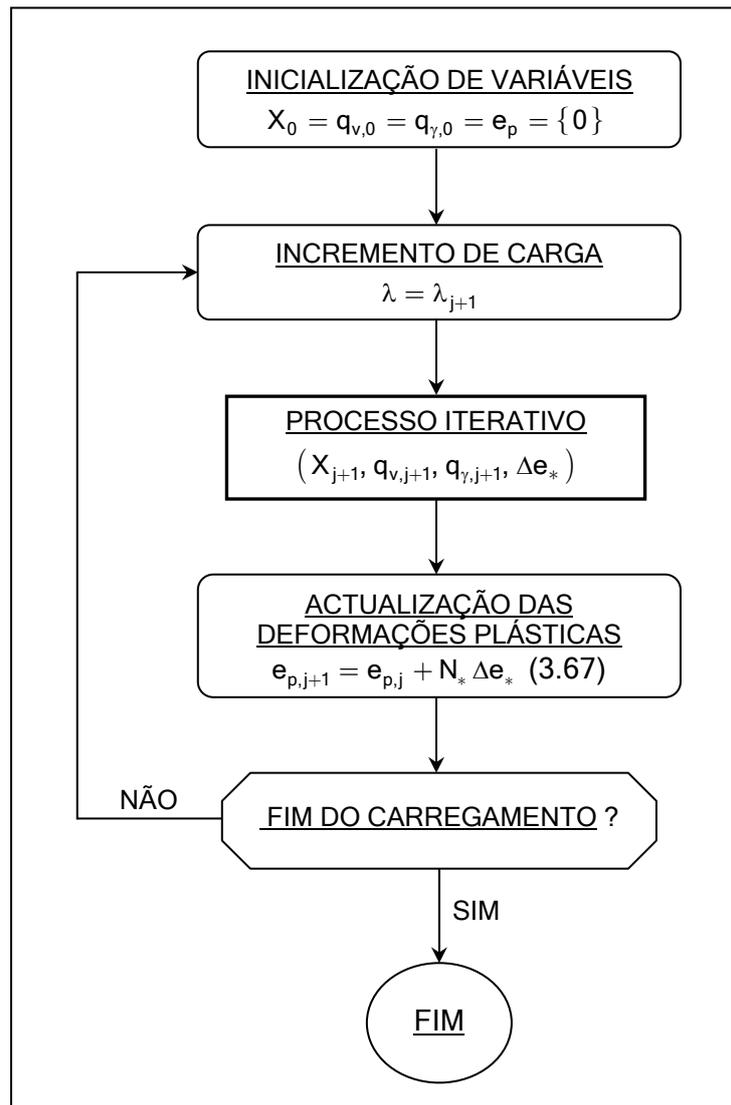


Figura 4-9: Algoritmo do incremento de carga.

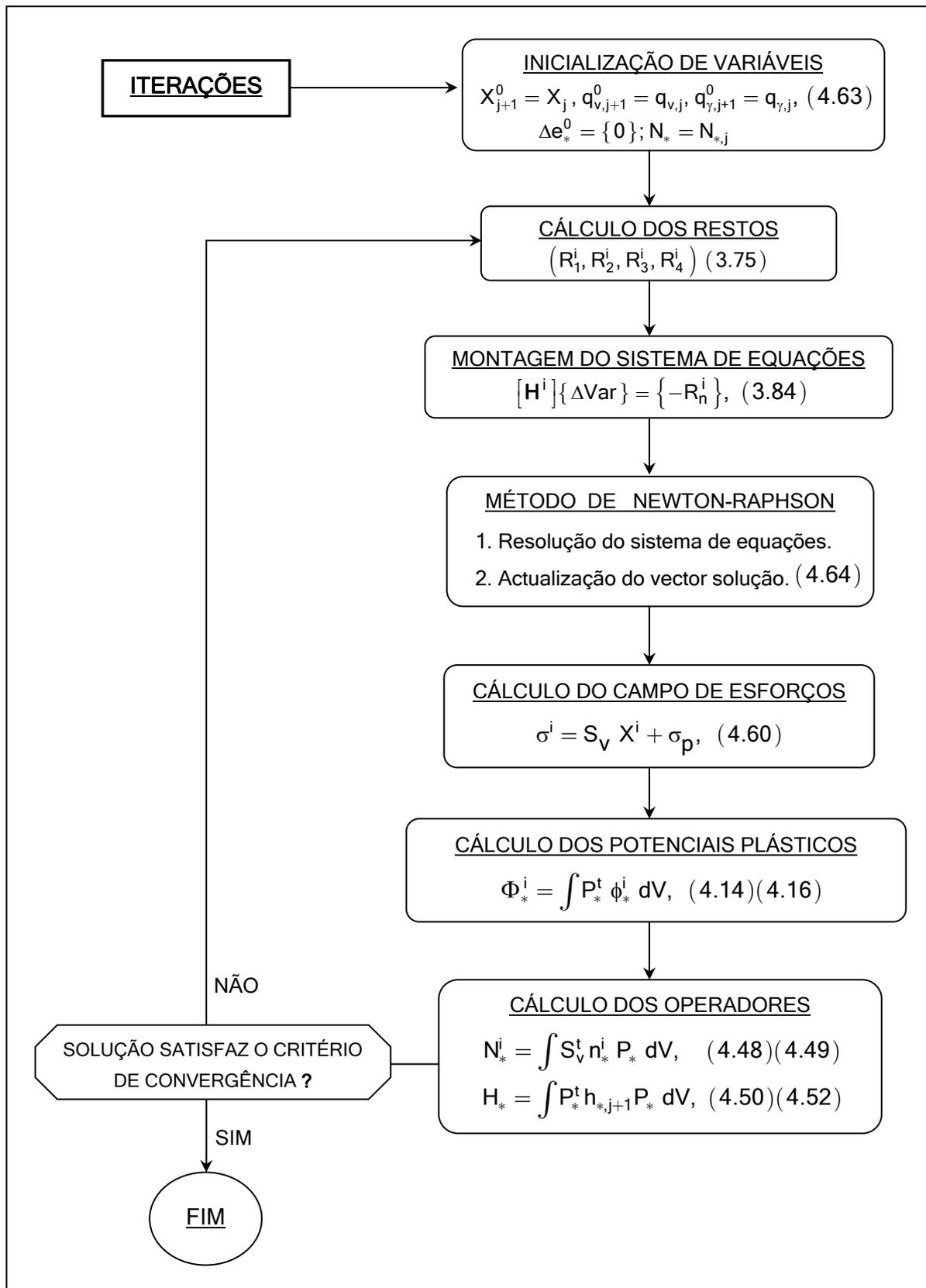


Figura 4-10: Algoritmo do processo iterativo.

Capítulo 5

Exemplos de Aplicação

5.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo são apresentados os exemplos que foram efectuados para testar o modelo numérico implementado.

O modelo foi implementado em dois programas de cálculo automático: o primeiro programa, denominado *Laje-Pol*, efectua o cálculo elástico de lajes espessas do tipo Reissner-Mindlin. O seu objectivo inicial resumia-se à introdução do autor às formulações não tradicionais. No entanto, devido a recorrer a monómios para efectuar as aproximações, permitiu tirar conclusões importantes quanto ao desempenho destas funções quando aplicadas ao modelo HMT, tendo-se considerado relevante a sua inclusão neste texto. O segundo programa, denominado por *Placa-Leg*, efectua a análise elastoplástica de placas (EPT e EPD), reunindo um conjunto de características que está de acordo com os objectivos deste trabalho. Assim sendo, recorre ao método de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações não lineares, o controlo de cedência é efectuado recorrendo à técnica dos pontos de colocação e/ou das células plásticas e permite ainda a inclusão de condições de cedência adaptadas à modelação de materiais com resistência combinada de atrito e coesão.

Ambos os programas foram desenvolvidos de raiz para esta dissertação, em computadores pessoais recorrendo ao ambiente de programação Matlab [33].

Os exemplos apresentados foram escolhidos de modo a ilustrar da forma mais vasta possível todas as potencialidades dos modelos implementados e dos programas desenvolvidos. A validação das soluções obtidas foi efectuada através da sua comparação com resultados provenientes de outros modelos numéricos e, em alguns casos, com soluções analíticas.

5.2 - ANÁLISE ELÁSTICA DE LAJES DE REISSNER-MINDLIN

Conforme já foi referido, o programa *Laje-Pol* permite efectuar a análise elástica de lajes espessas do tipo Reissner-Mindlin, utilizando funções do tipo polinomial (monómios) para efectuar a aproximação das grandezas estruturais.

Para testar o modelo analisou-se um conjunto variado de problemas, desde os casos mais simples onde é possível obter solução analítica, até casos mais complexos onde as soluções apresentam fortes gradientes. Os exemplos desenvolvidos visam também caracterizar o comportamento do programa, no que diz respeito à eficácia dos processos de refinamento- p (aumento do grau das funções de aproximação), e refinamento- h (aumento do número de elementos na malha). Por fim, foi testada a sensibilidade do modelo desenvolvido ao fenómeno de *locking* e à distorção da malha.

O programa engloba um conjunto de 33 rotinas de cálculo, e encontra-se dividido em dois grandes módulos. O primeiro módulo efectua o pré-processamento dos dados e o processamento da solução, enquanto que o segundo módulo engloba as rotinas de pós-processamento. Para efectuar a visualização das soluções, o programa recorre às rotinas de visualização denominadas por *Toolvis*, desenvolvidas também para este trabalho.

Para definir as aproximações é necessário fornecer ao programa o conjunto de parâmetros (g_{sm} , g_{sv} , g_{ut} , g_{uw} , g_{uft} , g_{ufw}) que representam, respectivamente, o grau máximo da aproximação para os campos de (momentos flectores e torsões, esforços transversos, rotações, deslocamentos transversais, rotações nas fronteiras estáticas e deslocamentos transversais nas fronteiras estáticas). Assim sendo, cada aproximação fica definida pela combinação em uma ou duas direcções dos polinómios de grau zero até ao respectivo grau máximo, definido por cada um dos parâmetros anteriores. O quadro 5-1 resume as configurações das aproximações utilizadas nos exemplos desenvolvidos.

Salienta-se que a combinação dos graus máximos das aproximações é definida de forma a evitar a presença de dependências lineares no sistema governativo, ou seja, a presença de modos espúrios. Assim sendo, o grau máximo dos campos de esforços deve ser sempre superior ao grau máximo dos campos de deslocamentos duais. O mesmo sucede relativamente aos campos de esforços, entre os momentos flectores e os esforços transversos, e

relativamente aos campos de deslocamentos e entre as rotações e os deslocamentos transversais. O estudo mais aprofundado deste assunto não se encontra nos objectivos deste trabalho, sendo tratado com maior rigor por Pereira [40, 43].

| Aproximação | g_{sm} | g_{sv} | g_{ut} | g_{uw} | g_{uft} | g_{ufw} |
|-------------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 4 | 6 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 4a | 6 | 5 | 5 | 4 | 6 | 5 |
| 5 | 7 | 6 | 6 | 5 | 6 | 5 |
| 6 | 8 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 |
| 7 | 9 | 8 | 8 | 7 | 8 | 7 |
| 8 | 10 | 9 | 9 | 8 | 9 | 8 |

Quadro 5-1: Aproximações utilizadas.

Como excepção a estas regras de definição das aproximações, encontra-se a configuração denominada no quadro 5-1 por aproximação *4a*, na qual o grau máximo das aproximações dos campos de deslocamentos nas fronteiras estáticas, é o mesmo que a dos campos de esforços duais. Esta definição para as aproximações conduz a um sistema governativo com modos espúrios. No entanto, é possível obter uma solução e verificar que se assegura a continuidade dos campos de esforços nas interfaces dos elementos, conforme se discutirá em §5.2.4.

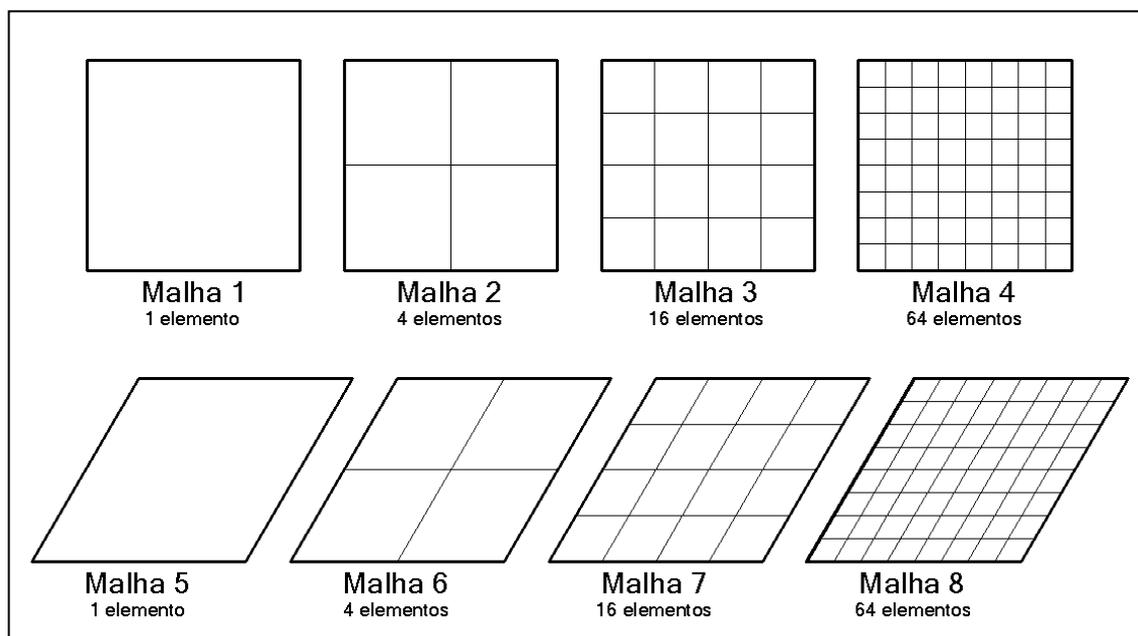


Figura 5-1: Malhas utilizadas nas discretizações dos modelos.

No que diz respeito às malhas de elementos finitos, utilizaram-se as malhas de 1, 4, 16 e 64 elementos finitos que se encontram representados na Figura 5-1.

Salienta-se que nos modelos HMT é preferível a utilização de refinamentos p -adaptativos [10, 39]. No entanto como se verá adiante, para o modelo implementado o aumento do grau das

aproximações é limitado pelo aparecimento de problemas numéricos associados ao mau condicionamento do sistema governativo. Desta forma, o refinamento h -adaptativo é o mais indicado a partir de um determinado grau das funções de aproximação.

5.2.1 - ANÁLISE DE LAJE QUADRADA SIMPLESMENTE APOIADA

Com o primeiro exemplo pretende-se ilustrar a análise de uma estrutura simples e regular, com uma solução analítica conhecida. Assim sendo, foi analisada a laje quadrada simplesmente apoiada representada na Figura 5-2.

A estrutura foi discretizada com recurso a apenas um elemento finito (malha 1), tendo-se utilizado uma aproximação do tipo 6.

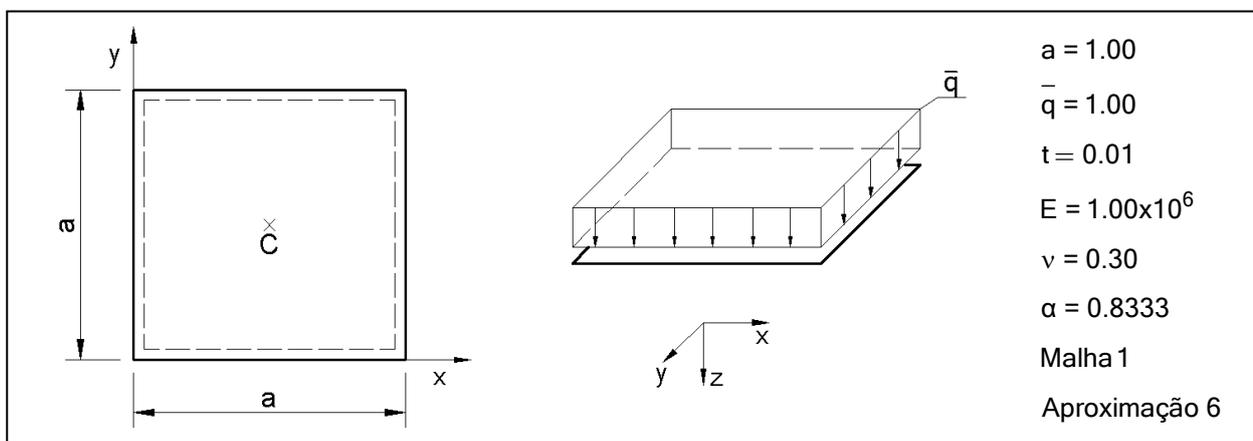


Figura 5-2: Definição das características da laje simplesmente apoiada.

Na Figura 5-3 são apresentados os campos de esforços e de deslocamentos obtidos do programa *Laje-Pol*.

No Quadro 5-2 apresentam-se os valores do momento (m_{xx}), do deslocamento transversal (w) no ponto C, e da energia de deformação elástica $\left(U = \frac{1}{2} X^t F X, [10] \right)$. Para facilitar a comparação com resultados provenientes de diferentes análises, efectuou-se a normalização indicada em (5.1).

$$\bar{m}_{xx}^c = \frac{100}{qL^2} m_{xx}^c, \quad \bar{w}^c = \frac{100D_f}{qL^4} w^c, \quad \bar{U} = \frac{100^2 D_f}{q^2 L^6} U. \quad (5.1)$$

| \bar{m}_{xx}^c | \bar{w}^c | \bar{U} |
|------------------|-------------|-----------|
| 4.790630 | 0.406440 | 8.517580 |

Quadro 5-2: Resultados da análise da laje quadrada através do programa *Laje-Pol*.

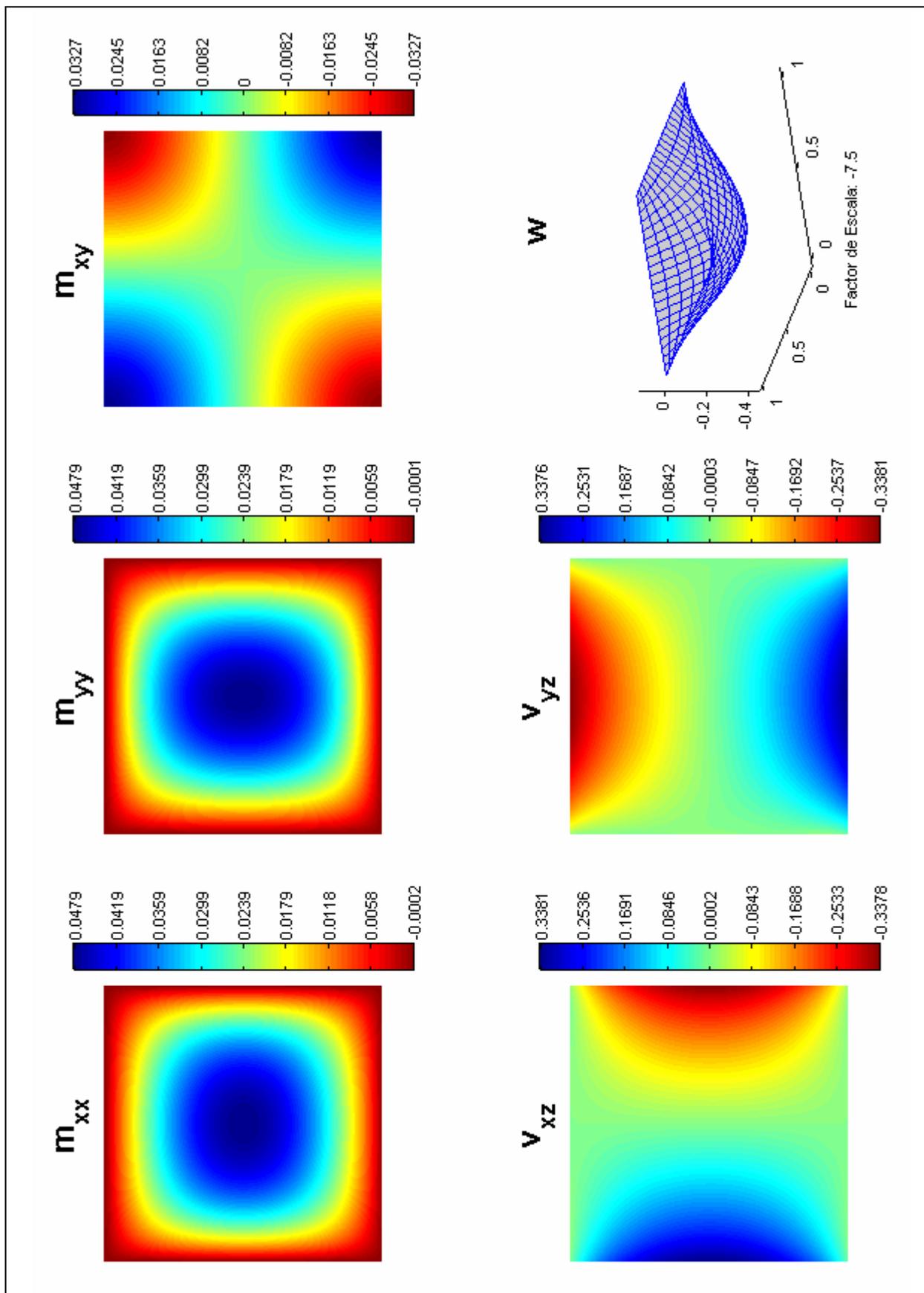


Figura 5-3: Campos de esforços e de deslocamentos - Laje simplesmente apoiada.

Os valores anteriores podem ser comparados com a solução analítica deste problema, obtida na forma de uma expansão em série de Fourier [37, 59, 67].

$$\bar{m}_{xxe}^c = 4.78863; \quad \bar{w}_e^c = 0.40644; \quad \bar{U}_e = 8.51760. \quad (5.2)$$

O erro relativo pode ser analisado através das razões apresentadas em (5.3), onde se conclui que para as três grandezas comparadas é sempre inferior a 0.042%.

$$\frac{\bar{m}_{xx}^c}{\bar{m}_{xxe}^c} = 1.000418; \quad \frac{\bar{w}^c}{\bar{w}_e^c} = 1.000000; \quad \frac{\bar{U}}{\bar{U}_e} = 0.999998 \quad (5.3)$$

Com este exemplo conclui-se que a solução obtida, tanto para os campos de esforços como para os campos de deslocamentos, é de boa qualidade, mesmo recorrendo a apenas um elemento finito.

5.2.2 - ANÁLISE DE LAJE ENVIESADA

O segundo exemplo tem por finalidade aferir a capacidade do modelo numérico para a análise de problemas mais complexos.

Foi analisada a laje enviesada representada na Figura 5-4, a qual apresenta singularidades nos campos de esforços na região dos cantos obtusos.

A estrutura foi discretizada com recurso a 1, 4, 16 e 64 elementos finitos (malha 5, 6, 7, 8), tendo-se utilizado aproximações do tipo 3 e 4.

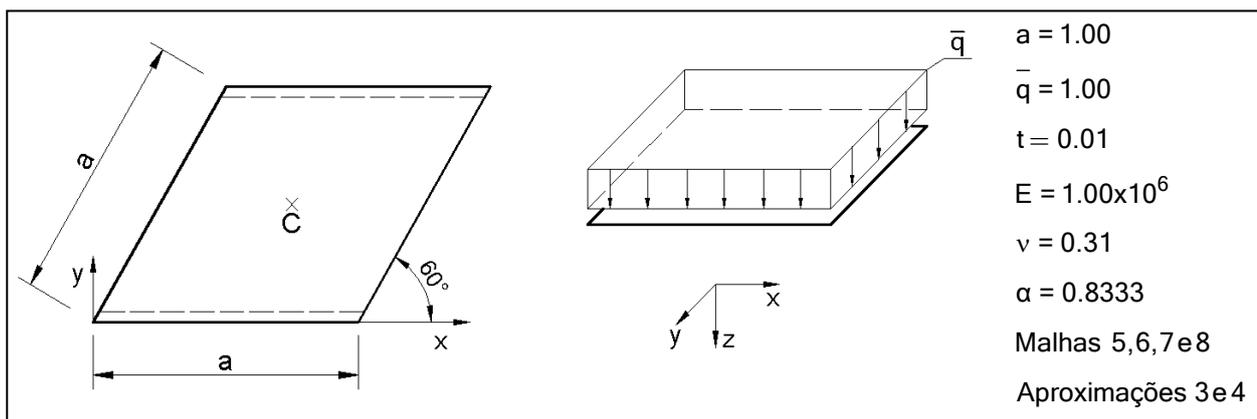


Figura 5-4: Definição das características da laje enviesada.

Os resultados obtidos para o momento (m_{yy}), e para o deslocamento transversal (w) no ponto C, bem como para a energia de deformação (U), encontram-se listados no Quadro 5-3.

Mais uma vez, para facilitar a comparação com outras formulações numéricas, os resultados são normalizados de acordo com as expressões apresentadas em (5.1).

| Malha | Aproximação | $\overline{m_{xx}}^c$ | \overline{w}^c | \overline{U} |
|-------|-------------|-----------------------|------------------|----------------|
| 5 | 4 | 9.84340 | 0.80748 | 24.42737 |
| 6 | 4 | 8.69678 | 0.80118 | 24.07831 |
| 7 | 4 | 9.59130 | 0.79781 | 23.92204 |
| 8 | 3 | 9.61200 | 0.79687 | 23.88024 |

Quadro 5-3: Resultados da análise da laje enviesada através do programa Laje-Pol.

Podemos agora comparar os resultados obtidos com outros, provenientes de formulações numéricas alternativas, nomeadamente os modelos HMT com Wavelets (*Wav_1*, *Wav_2*, *Wav_3*) e com polinómios de Legendre (*Mix_L*), desenvolvidos respectivamente por Castro [10] e Pereira [39], modelos Híbridos de Trefftz (*H_T*) desenvolvidos por Jirousek et al. [28], os modelos (*A9*, *D_F*) desenvolvidos por Razzaque [49], e o modelo (*E16*) de Roufaeil [54].

| Modelo | $\overline{m_{xx}}^c$ | \overline{w}^c |
|--------|-----------------------|------------------|
| Wav_1 | 9.819 | 0.8096 |
| Wav_4 | 9.704 | 0.8029 |
| Wav_16 | 9.621 | 0.7968 |
| Mix_L | 9.609 | 0.8023 |
| H_T | 9.674 | 0.7843 |
| A9 | 9.473 | 0.7860 |
| D_F | 9.585 | 0.7945 |
| E16 | 9.244 | 0.7683 |

Quadro 5-4: Resultados provenientes de outras formulações numéricas.

A comparação destes resultados permite concluir que a solução fornecida pelo modelo desenvolvido permite recuperar os resultados provenientes das outras formulações de referência.

Na Figura 5-5 são apresentados os campos de momentos flectores e torsões e de deslocamentos transversais, obtidos do programa *Laje-Pol*.

5.2.3 - ANÁLISE AO REFINAMENTO DO GRAU DAS APROXIMAÇÕES

Com o terceiro exemplo pretende-se analisar a evolução da qualidade da solução com o aumento do grau da aproximação (refinamento- p). Utilizou-se a laje quadrada simplesmente apoiada definida na Figura 5.2, tendo-se variado o grau máximo das aproximações.

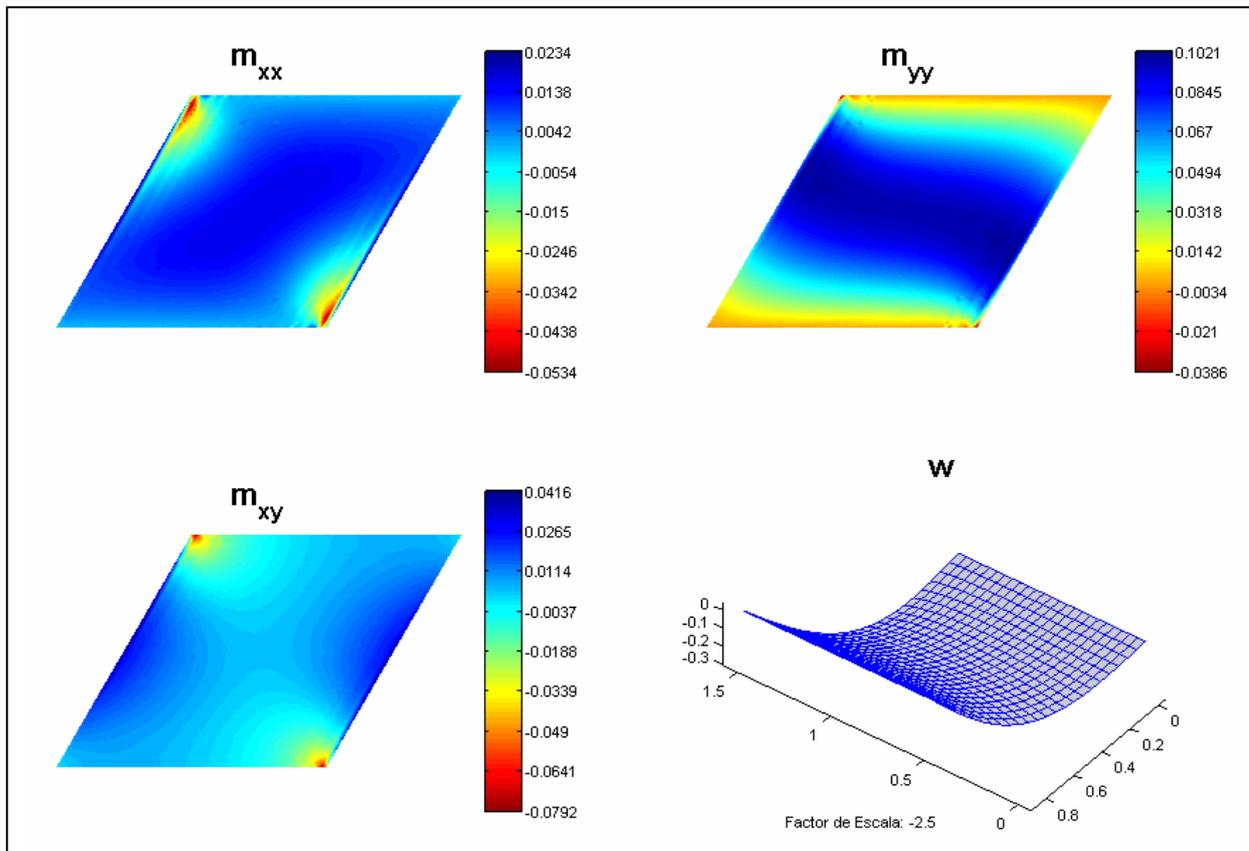


Figura 5-5: Campos de esforços e de deslocamentos - Laje enviesada.

No quadro 5-5 encontram-se listadas as mesmas grandezas estruturais definidas para o primeiro exemplo (§5.2.1), normalizadas de novo em relação à correspondente solução analítica.

| Aproximação | $\frac{\bar{m}_{xx}^c}{\bar{m}_{xxe}^c}$ | $\frac{\bar{w}^c}{\bar{w}_e^c}$ | $\frac{\bar{U}}{\bar{U}_e}$ |
|-------------|--|---------------------------------|-----------------------------|
| 1 | 0.59759 | 0.33599 | 0.80164 |
| 2 | 0.98761 | 0.97720 | 0.99999 |
| 3 | 0.97349 | 0.97392 | 0.99820 |
| 4 | 0.99998 | 1.00161 | 1.00000 |
| 5 | 1.00052 | 1.00168 | 0.99998 |
| 6 | 1.00009 | 1.00001 | 1.00000 |
| 7 | 1.00042 | 1.00000 | 1.00000 |
| 8 | 0.99290 | 1.00138 | 1.00004 |

Quadro 5-5: Resultados da análise ao refinamento do grau da aproximação através do programa Laje-Pol.

Da análise dos resultados apresentados, verifica-se que com o aumento do grau das funções, a solução obtida aumenta de qualidade, aproximando-se da solução analítica.

Comparando a aproximação 3 relativamente à aproximação 2 que é menos rica, a primeira apresenta pior qualidade, quer em termos do momento flector (\bar{m}_{xx}), quer em termos de

deslocamento transversal. Esta aparente divergência deve-se ao modelo HMT fornecer soluções que à partida não são nem localmente compatíveis nem localmente equilibradas. Consequentemente, a convergência da solução não é monotónica, conforme se pode verificar com facilidade na análise efectuada no § 5.2.4 (ver soluções apresentadas na Figura 5-11).

Na Figura 5-6 encontra-se representada a evolução das grandezas utilizadas na comparação.

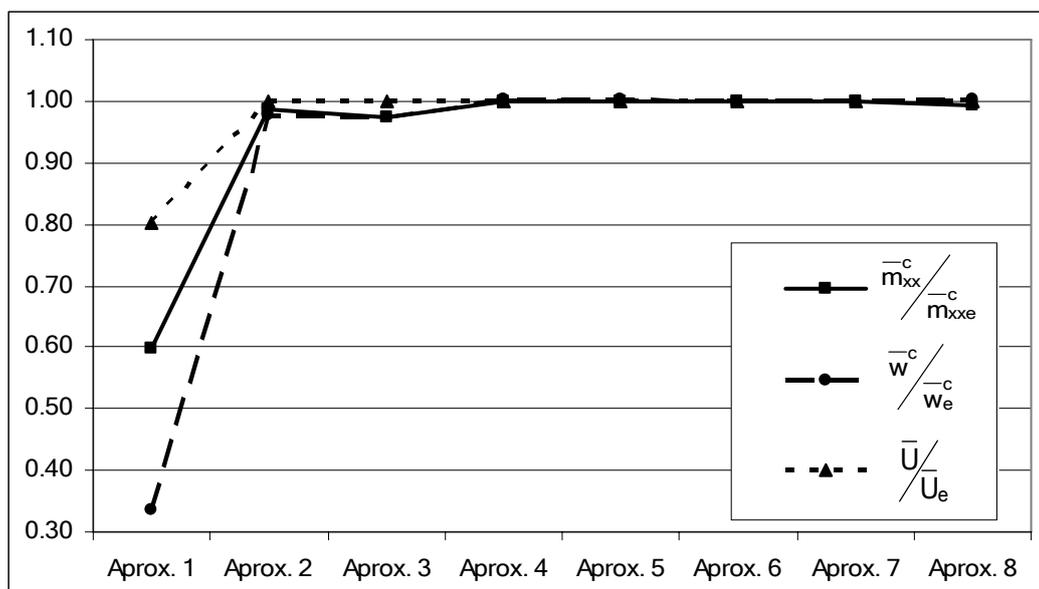


Figura 5-6: Representação gráfica das grandezas estruturais de comparação - Exemplo 3.

Para aproximações com graus mais elevados, a solução afasta-se progressivamente do valor analítico. Tal deve-se a problemas no comportamento numérico do modelo, uma vez que o aumento do grau dos monómios envolvidos na aproximação origina sistemas de equações progressivamente pior condicionados.

Da análise da Figura 5-7, onde se compara a forma das funções de aproximação utilizadas no programa *Laje-Pol* (monómios) e as funções de Legendre utilizadas no programa *Placa-Leg*, facilmente se constata a proximidade de forma dos monómios utilizados neste programa, sendo esta proximidade cada vez maior à medida que o grau aumenta.

Por definição, num sistema de equações lineares bem (mal) condicionado, pequenas variações dos coeficientes da matriz do sistema governativo produz pequenas (grandes) variações nas soluções obtidas. Um indicador que permite avaliar este efeito é o número de condição [30], que traduz a sensibilidade da solução do sistema governativo a flutuações numéricas.

Podemos analisar o número de condição da matriz dos coeficientes do sistema governativo através das rotinas *condest* e *rcond* [3] embutidas no programa Matlab [33]. Estes valores encontram-se listados no Quadro 5-6 e representados graficamente na Figura 5-8.

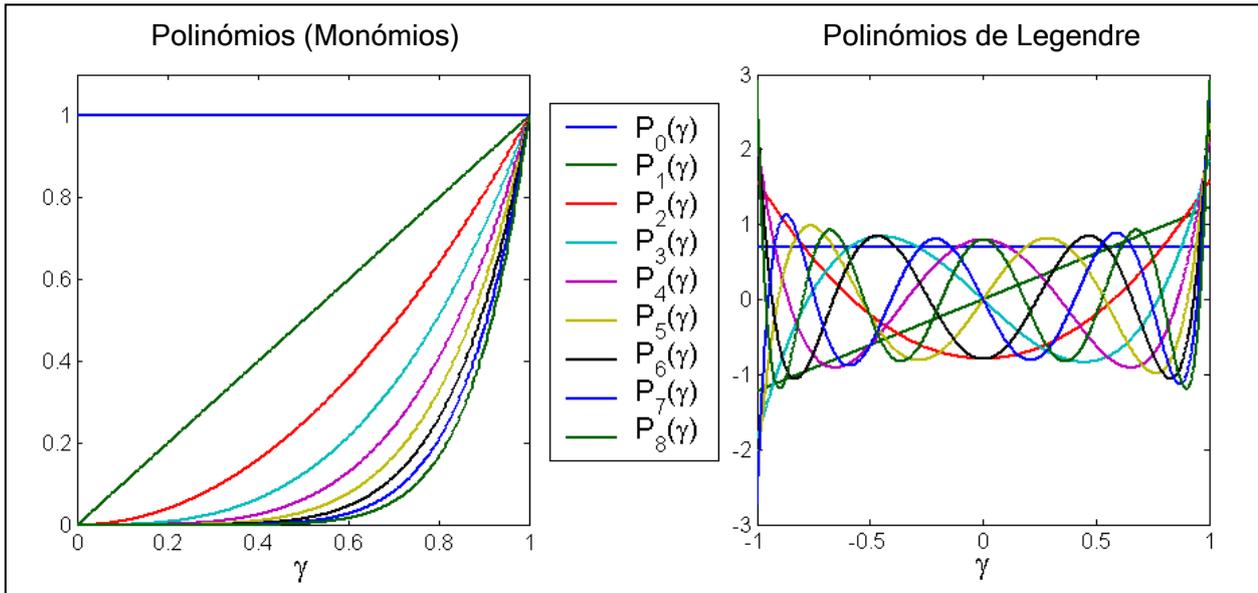


Figura 5-7: Representação gráfica das funções de aproximação utilizadas.

O número de condição definido em relação à inversão da matriz do sistema governativo (*condest*) toma valores perto da unidade se o sistema é bem condicionado e valores elevados para sistemas mal condicionados. Se se utilizar o número de condição recíproco (*rcond*) um sistema é bem condicionado para valores perto da unidade, enquanto é mal condicionado para valores perto da máxima precisão decimal do instrumento de cálculo, que no caso é da ordem de (2.2E-16).

| Aproximação | <i>condest</i> | <i>rcond</i> |
|-------------|----------------|--------------|
| 1 | 2,96120E+09 | 3,37700E-10 |
| 2 | 3,32525E+12 | 3,00730E-13 |
| 3 | 3,18614E+15 | 3,13720E-16 |
| 4 | 4,62656E+18 | 1,65690E-19 |
| 5 | 9,93268E+21 | 1,03000E-22 |
| 6 | 1,81365E+22 | 1,03240E-22 |
| 7 | 1,99263E+22 | 7,21000E-23 |
| 8 | 2,02413E+22 | 3,11930E-23 |

Quadro 5-6: Valores das funções *condest* e *rcond* para a matriz do sistema governativo.

Da análise da informação anterior e da observação da Figura 5-8, conclui-se que o número de condição (recíproco) é crescente (decrecente) à medida que o grau máximo da aproximação aumenta, até que se atinge a precisão máxima do sistema, a partir do qual a solução final do sistema governativo pode apresentar grandes flutuações e perder significado.

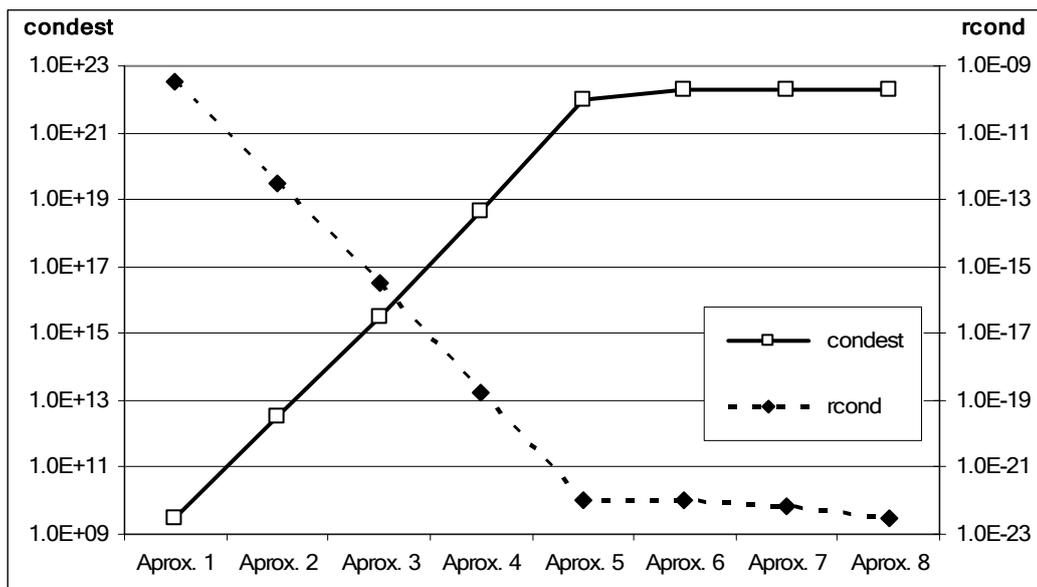


Figura 5-8: Representação gráfica das grandezas *condest* e *rcond*.

5.2.4 - ANÁLISE AO REFINAMENTO DA MALHA

Neste exemplo pretende-se analisar a evolução da qualidade da solução com o aumento do número de elementos considerado na malha de elementos finitos (refinamento-*h*).

O problema analisado é uma laje quadrada com 3 bordos encastrados e um bordo livre, Figura 5-9. Utilizaram-se 4 malhas recorrendo a 1, 4, 16 e 64 elementos, e as aproximações 2, 3 e 4.

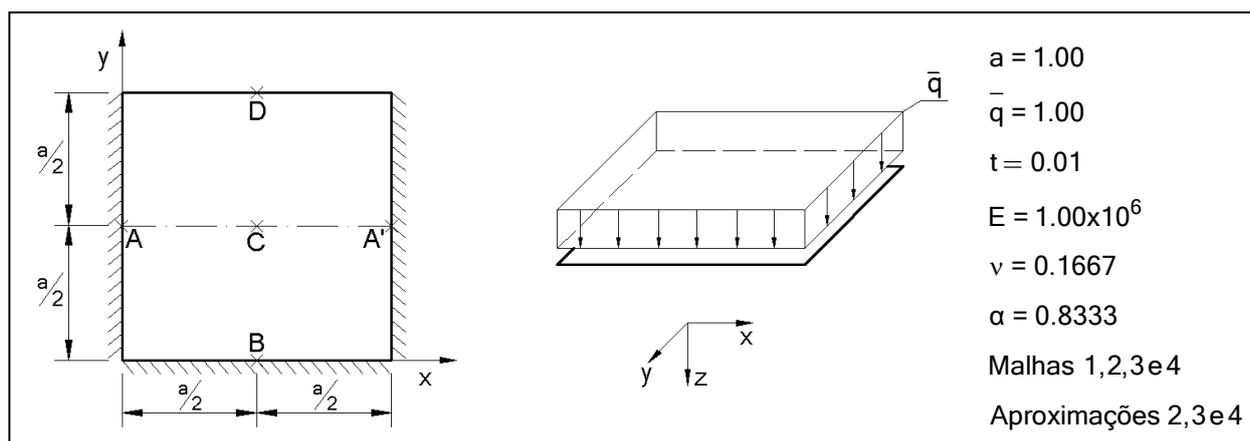


Figura 5-9: Definição das características da laje - Análise ao Refinamento da Malha.

Na Figura 5-10 são apresentados os campos de esforços e de deslocamentos obtidos considerando a malha com 4 elementos e a aproximação 3.

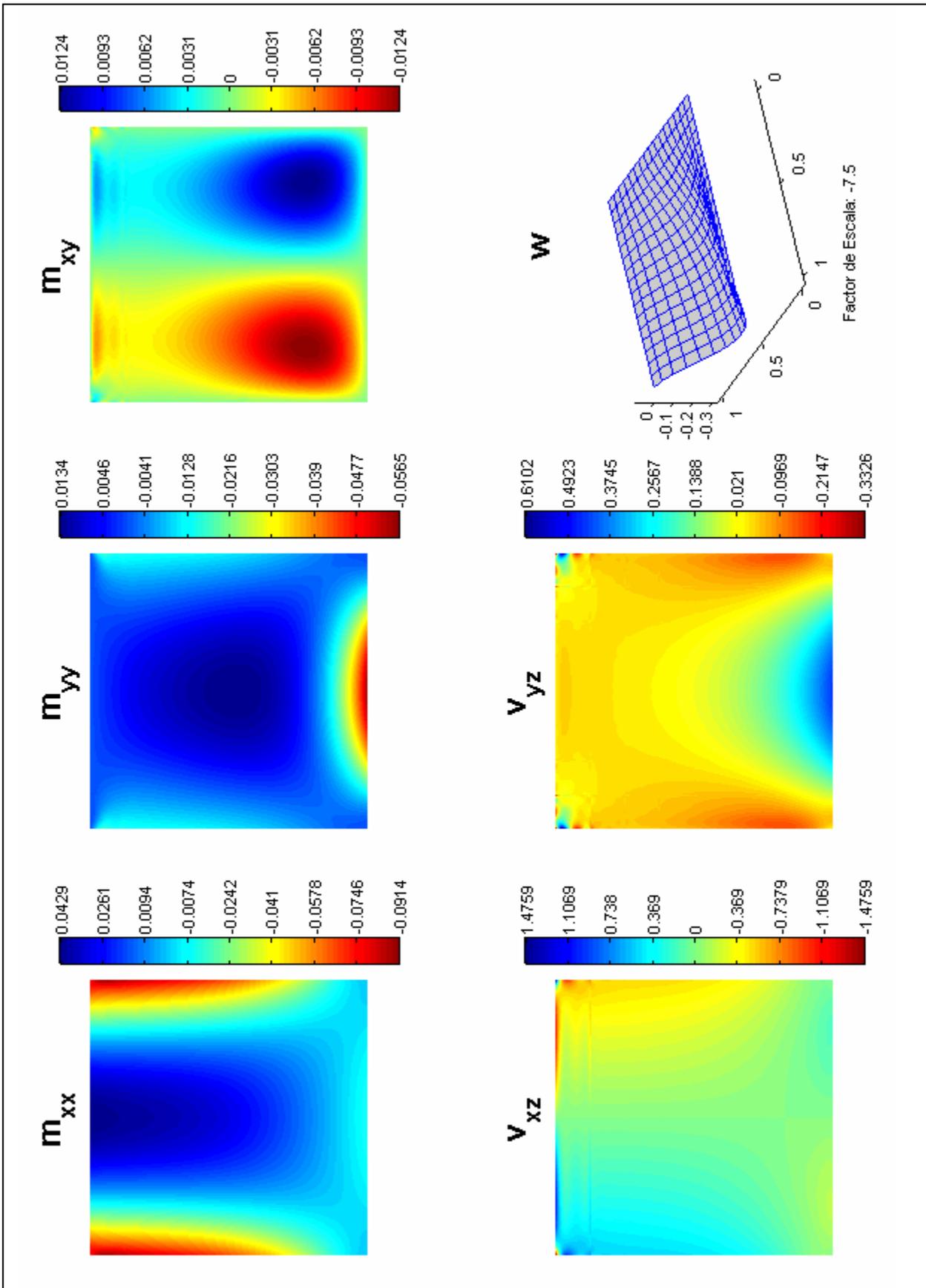


Figura 5-10: Campos de esforços e de deslocamentos - Malha 4 e aproximação 3.

No Quadro 5-7 são listados os valores de (m_{xx}) e (v_{xz}) no ponto A, (m_{yy}) e (v_{yz}) no ponto B, (w) no ponto D, e da energia de deformação (U) , obtidos para as várias malhas e aproximações consideradas. Para ilustrar graficamente o seu andamento, apresenta-se na Figura 5-11 a evolução das grandezas (m_{xx}^A) , (w^D) e (U) , para os casos considerados.

| Aproximação | Malha | m_{xx}^A | v_{xz}^A | m_{yy}^B | v_{yz}^B | w^D | U |
|-------------|-------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| 2 | 1 | -6,47653E-02 | 4,58135E-01 | -5,38979E-02 | 4,48782E-01 | 2,93503E-02 | 5,19331E-03 |
| | 2 | -6,74752E-02 | 5,12700E-01 | -6,09518E-02 | 5,33186E-01 | 3,48392E-02 | 5,14826E-03 |
| | 3 | -6,62330E-02 | 4,79475E-01 | -5,66334E-02 | 4,71810E-01 | 3,25935E-02 | 5,16421E-03 |
| | 4 | -6,60497E-02 | 4,64154E-01 | -5,64814E-02 | 4,62679E-01 | 3,24119E-02 | 5,16446E-03 |
| 3 | 1 | -6,44586E-02 | 4,56775E-01 | -5,36856E-02 | 4,56763E-01 | 2,85409E-02 | 5,12869E-03 |
| | 2 | -6,63628E-02 | 4,37767E-01 | -5,68378E-02 | 4,82740E-01 | 3,20508E-02 | 5,16813E-03 |
| | 3 | -6,60973E-02 | 4,73532E-01 | -5,64203E-02 | 4,61102E-01 | 3,24081E-02 | 5,16546E-03 |
| | 4 | -6,60473E-02 | 4,62624E-01 | -5,64737E-02 | 4,59244E-01 | 3,23839E-02 | 5,16389E-03 |
| 4 | 1 | -6,58105E-02 | 4,54060E-01 | -5,73094E-02 | 4,76777E-01 | 3,29903E-02 | 5,17102E-03 |
| | 2 | -6,48742E-02 | 4,72593E-01 | -5,50464E-02 | 4,28108E-01 | 3,24930E-02 | 5,16721E-03 |
| | 3 | -6,60393E-02 | 4,43815E-01 | -5,64574E-02 | 4,66053E-01 | 3,24088E-02 | 5,16456E-03 |

Quadro 5-7: Resultados da análise ao refinamento da malha, através do programa *Laje-Pol*.

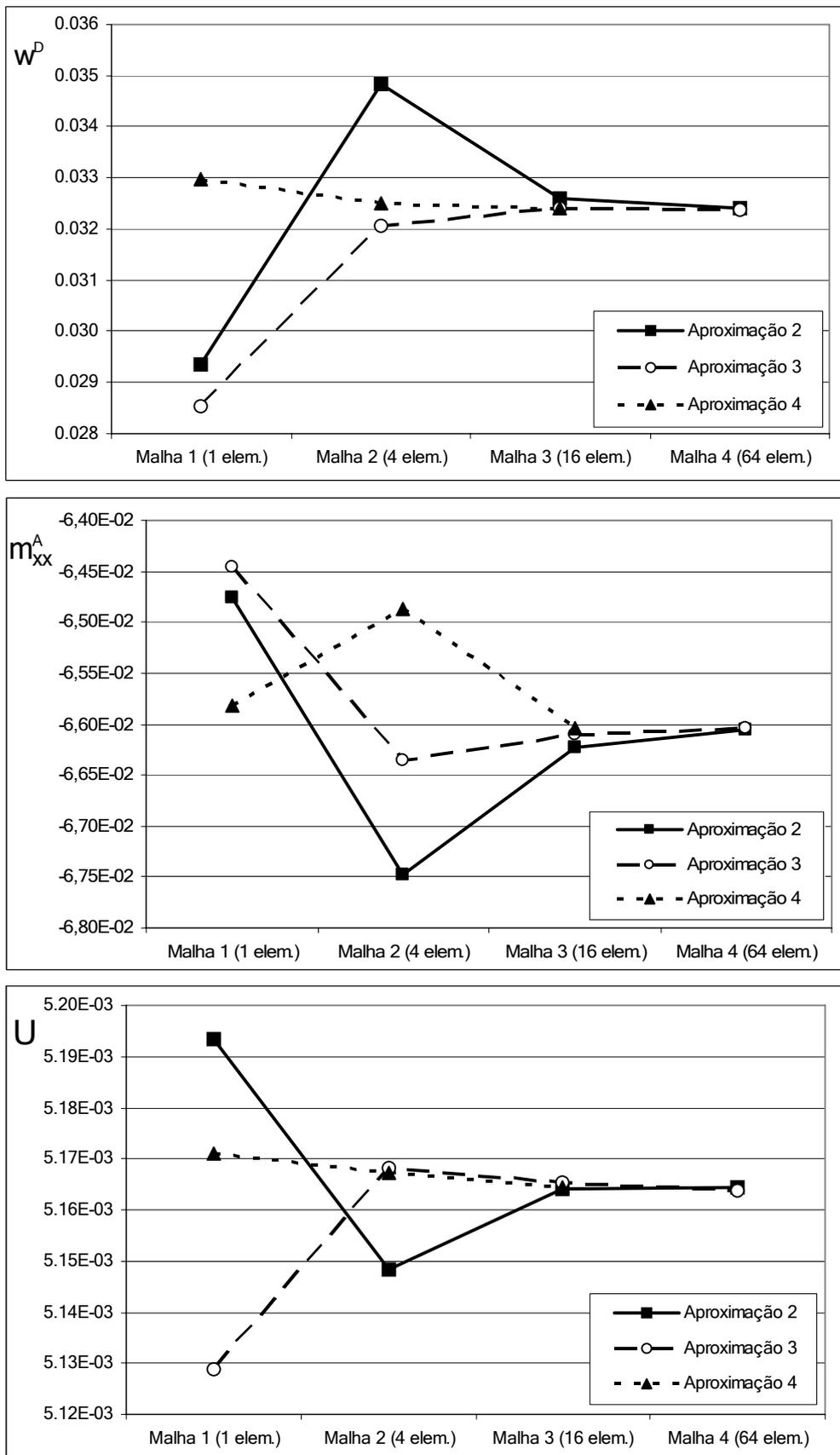


Figura 5-11: Representação gráfica da evolução das grandezas (m_{xx}^A), (w^D) e (U), com o refinamento do número de elementos e da aproximação.

Conclui-se que com o refinamento da malha, a solução converge de forma não monotônica para um valor fixo, como se pode verificar da análise da evolução da energia de deformação na Figura 5-11. No entanto, para malha de 4 elementos, obteve-se piores resultados para (m_{xx}) e (w_c), contrariando esta tendência. Esta aparente divergência da solução em relação ao refinamento da malha, deve-se ao aparecimento de desequilíbrios nas fronteiras estáticas inter-elementares, onde no modelo HMT o equilíbrio é ponderado, conforme se pode verificar na Figura 5-12, onde se representa a solução obtida com base na aproximação definida nos dois elementos adjacentes.

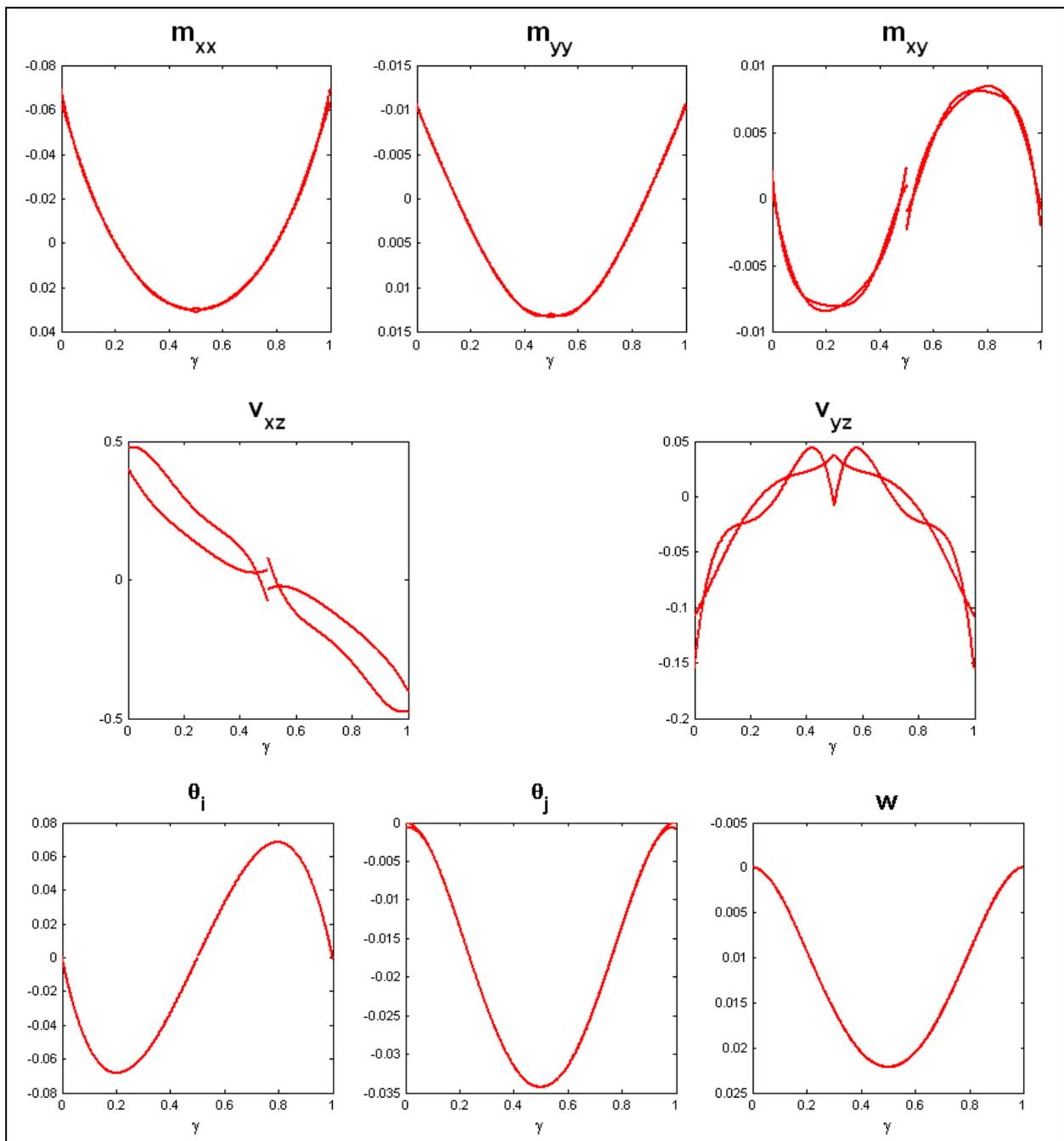


Figura 5-12: Representação gráfica das grandezas estruturais - Corte A-A' (Aprox. 4).

Estes desequilíbrios surgem devido à forma como é definida a aproximação. Estas funções não são suficientes para assegurar a continuidade ao nível elementar das grandezas estruturais, dando origem aos desequilíbrios grosseiros entre elementos.

A correcção dessas descontinuidades está em geral associada a um aumento das funções de aproximação do campo de deslocamentos nas fronteiras estáticas, pois este campo é utilizado para impor o equilíbrio de forma ponderada. A esse aumento está associado o aparecimento de dependências lineares no sistema governativo, o que conduz à perda do significado físico dos campos de deslocamentos no domínio sendo, regra geral, necessário recorrer à utilização de métodos de tratamento e eliminação desses modos espúrios.

Na Figura 5-13 representa-se o traçado dos campos de esforços e de deslocamentos ao longo do corte AA', obtidos considerando a aproximação 4a), na qual se utilizou a mesma aproximação para os campos de esforços no domínio e para os campos de deslocamentos nas fronteiras estáticas.

Conforme seria de esperar, observa-se uma melhoria geral em termos de continuidade das grandezas estruturais. Os campos de momentos (m_{yy}) e do esforço transversal (v_{yz}), são agora praticamente contínuos.

5.2.5 - ANÁLISE AO EFEITO DE LOCKING

O denominado *efeito de locking* [10] pode surgir ao analisar-se um painel de laje de reduzida espessura, utilizando uma formulação de lajes espessas, como a de Reissner-Mindlin utilizada neste trabalho. Este efeito é caracterizado pela diminuição da flexibilidade no modelo numérico com o aumento da esbelteza da laje, pois o termo da deformabilidade por corte torna-se anormalmente grande e dominante face à deformabilidade por flexão. Somos então conduzidos a uma solução em que a deformação da laje é subestimada [51, 66].

Este efeito surgiu inicialmente na formulação tradicional do MEF, tendo-se utilizado várias estratégias para contornar este problema, sendo a mais comum resultante da sub-avaliação dos termos de matriz de rigidez, através da implementação de integrações reduzidas e/ou selectivas, tendo este método a desvantagem da possibilidade de aparecimento dos modos de energia nula.

Os modelos HMT são caracterizados por serem insensíveis ao efeito de *locking* [10, 43]. Contudo, interessa testar a susceptibilidade do modelo implementado no programa *Laje-Pol* a este fenómeno numérico. Assim sendo, analisou-se a laje em consola apresentada na Figura 5-14, recorrendo-se apenas a 1 elemento finito (malha 1) e a uma aproximação do tipo 4.

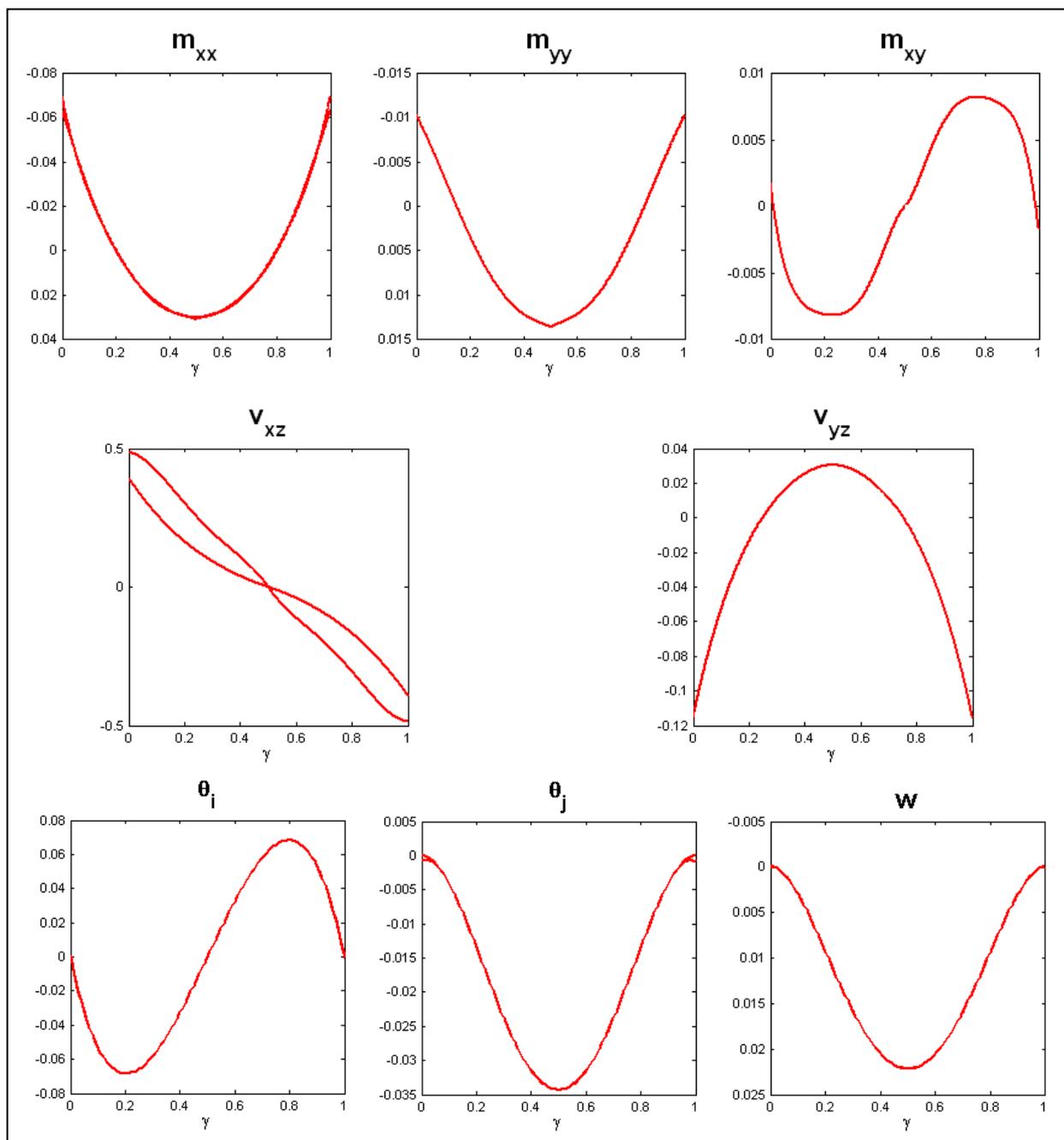


Figura 5-13: Representação gráfica das grandezas estruturais - Corte A-A' (Aprox. 4a).

Foram efectuadas diversas análises nas quais se variou a espessura da laje (t). Foram considerados valores de esbelteza da laje ($\lambda = L/h$), onde a deformabilidade de corte é claramente dominante ($t = 0.5, \lambda = 2$), até valores onde a flexão toma o papel principal do ponto de vista das deformações geradas ($t = 0.0001, \lambda = 10000$). As espessuras consideradas encontram-se definidas no Quadro 5.8.

Na Figura 5-15 apresenta-se o campo de esforços e de deslocamentos obtidos na análise da laje através da utilização do programa *Laje-Pol*, para o caso ($t = 0.01$).

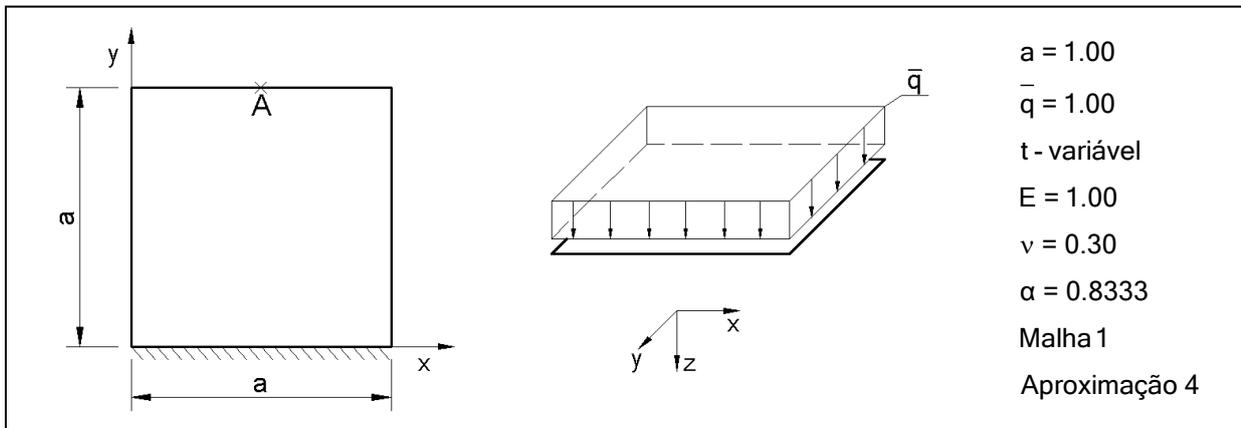


Figura 5-14: Definição das características da laje - Análise ao efeito de *locking*.

Para analisar a susceptibilidade ao *locking*, comparam-se os valores do deslocamento transversal no ponto A, obtidos para as diversas análises efectuadas.

Os resultados obtidos são apresentados no Quadro 5-8 e a sua representação gráfica encontra-se na Figura 5-16. De modo a facilitar a comparação da informação, os resultados foram normalizados através da relação,

$$\bar{w} = wt^3, \quad (5.4)$$

pois no caso da formulação das lajes finas esse valor é constante para qualquer espessura considerada. Os resultados foram ainda comparados com os provenientes da análise de um programa comercial de elementos finitos tradicionais [55], que utiliza a formulação de lajes finas, tendo-se recorrido a 2500 elementos. O resultado obtido nessa análise é tomado como valor de referência,

$$\bar{w}_{\text{ref}} = 1.409701. \quad (5.5)$$

De acordo com os resultados obtidos, a diminuição da espessura da laje até valores onde a deformabilidade por corte seja desprezável face à deformabilidade por flexão, não conduz à diminuição excessiva da flexibilidade. Constata-se que os deslocamentos obtidos convergem para a solução que se obteria com um modelo de laje finas.

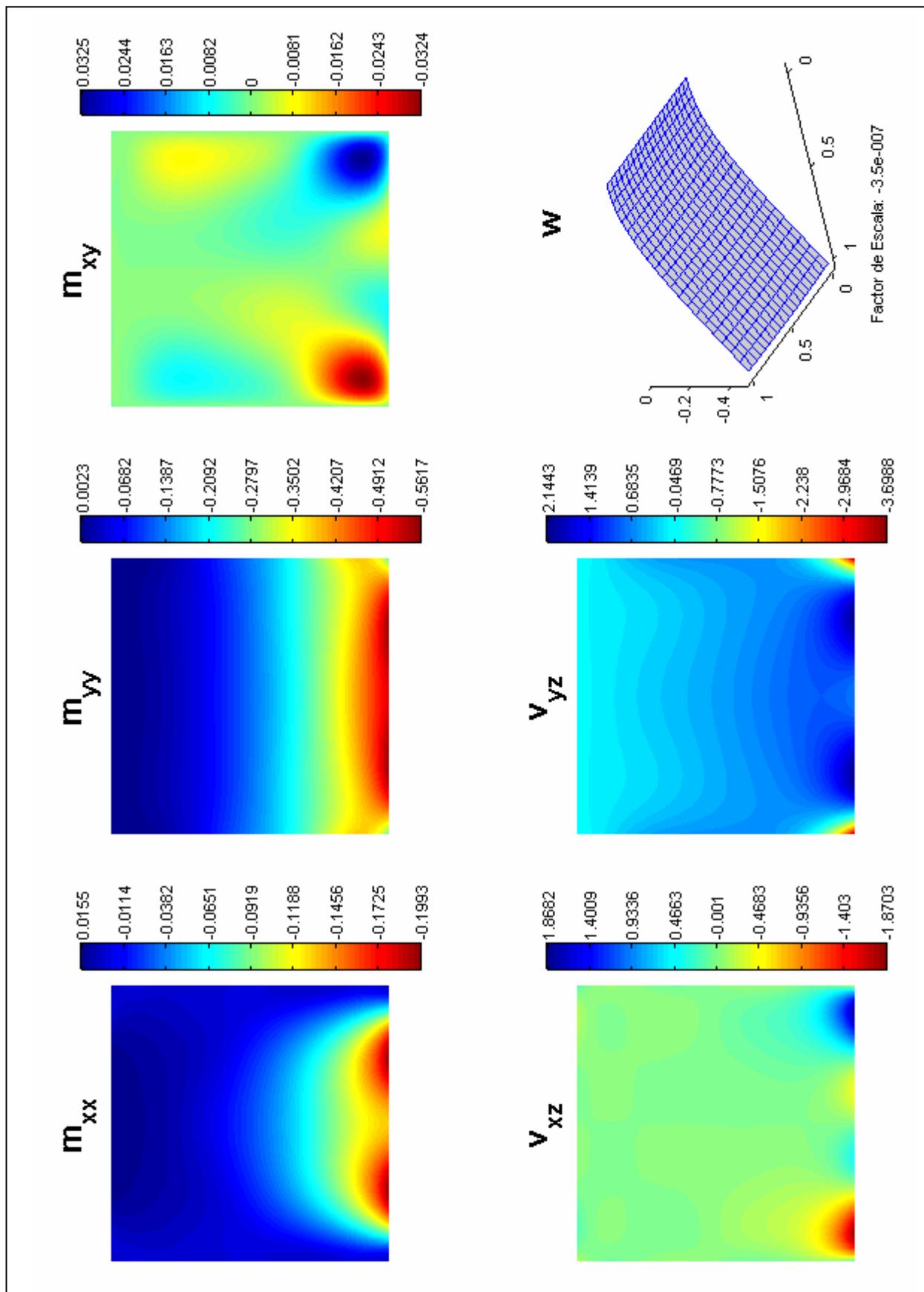


Figura 5-15: Campos de esforços e de deslocamentos - Análise ao efeito de *locking* ($t=0.01$).

| t | \bar{w} | $\frac{\bar{w}}{w_{ref}}$ |
|--------|-----------|---------------------------|
| 0.50 | 1.837828 | 1.303700 |
| 0.40 | 1.693924 | 1.201619 |
| 0.30 | 1.579646 | 1.120553 |
| 0.25 | 1.533385 | 1.087737 |
| 0.20 | 1.494262 | 1.059985 |
| 0.15 | 1.462258 | 1.037282 |
| 0.10 | 1.437521 | 1.019735 |
| 0.05 | 1.420715 | 1.007813 |
| 0.02 | 1.415342 | 1.004001 |
| 0.01 | 1.414529 | 1.003425 |
| 0.001 | 1.414255 | 1.003230 |
| 0.0001 | 1.414182 | 1.003179 |

Quadro 5-8: Valores do deslocamento transversal em função da espessura da laje - Ponto A.

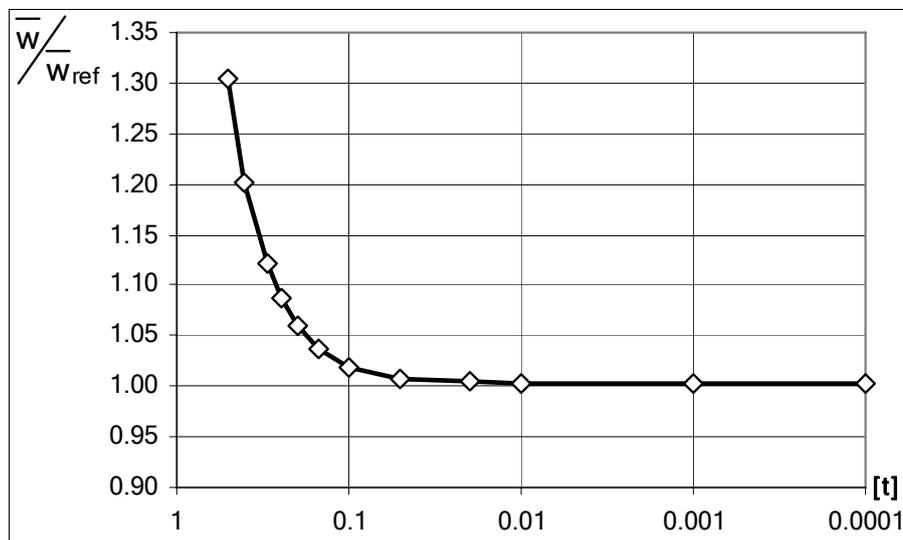


Figura 5-16: Representação gráfica da relação (\bar{w}/w_{ref}) .

Desta forma conclui-se que o modelo HMT implementado no programa Laje-Pol, se apresenta insensível ao fenómeno de *locking*.

5.2.6 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À DISTORÇÃO DA MALHA

Para analisar a sensibilidade do modelo numérico à distorção da malha, será analisado um painel de laje simplesmente apoiado, definido com 2 elementos, tendo-se introduzido diferentes valores para a distorção da malha ao variar o valor do parâmetro (γ) (Figura 5-17).

São listados os valores dos momentos flectores (m_{xx}, m_{yy}), e o deslocamento transversal (w) do ponto C, bem como da energia de deformação (U), tendo-se recorrido a duas aproximações distintas. Os valores definidos na interface dos elementos foram obtidos a partir da média dos

valores obtidos com base na aproximação das grandezas definidas em cada um dos elementos.

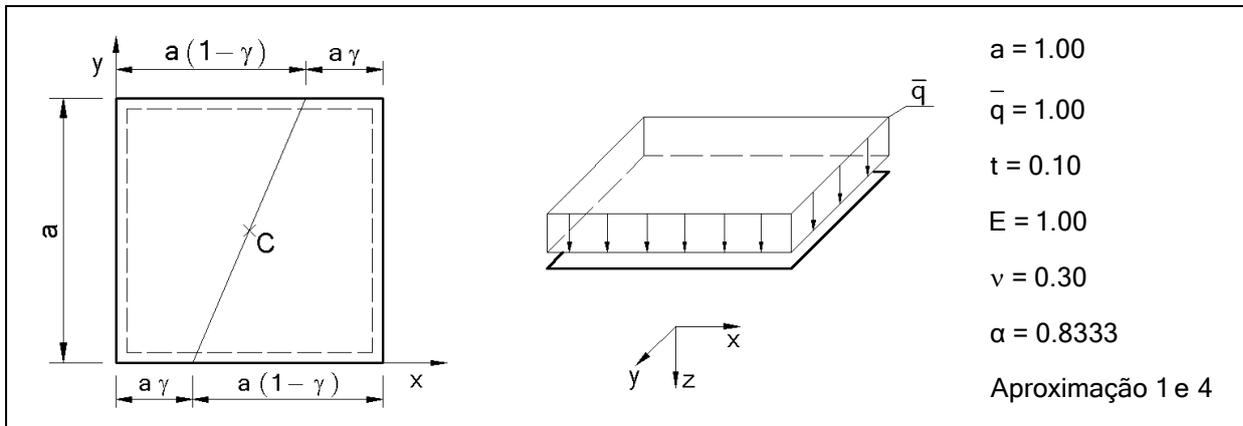


Figura 5-17: Definição das características laje - Sensibilidade à distorção da malha.

Para melhor aferir a sensibilidade à distorção da malha do modelo numérico, os resultados apresentados foram normalizados com os valores obtidos para a malha não distorcida ($\gamma = 0.50$).

| γ | APROXIMAÇÃO 1 | | | | APROXIMAÇÃO 4 | | | |
|----------|------------------|------------------|-------------|-----------|------------------|------------------|-------------|-----------|
| | \bar{M}_{xx}^c | \bar{M}_{yy}^c | \bar{w}^c | \bar{U} | \bar{M}_{xx}^c | \bar{M}_{yy}^c | \bar{w}^c | \bar{U} |
| 0.50 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 0.45 | 0.983701 | 0.961765 | 0.978719 | 0.979243 | 0.999736 | 1.000917 | 0.999719 | 0.999968 |
| 0.40 | 0.934151 | 0.852401 | 0.917801 | 0.920138 | 0.999009 | 1.003746 | 0.998862 | 0.999861 |
| 0.35 | 0.850847 | 0.687120 | 0.825334 | 0.831331 | 0.998005 | 1.008424 | 0.997378 | 0.999633 |
| 0.30 | 0.736453 | 0.488231 | 0.712663 | 0.724656 | 0.997101 | 1.015619 | 0.995143 | 0.999195 |
| 0.25 | 0.598620 | 0.280410 | 0.591786 | 0.612196 | 0.996174 | 1.023934 | 0.991898 | 0.998363 |
| 0.20 | 0.449169 | 0.085526 | 0.472977 | 0.503817 | 0.995178 | 1.034149 | 0.987098 | 0.996771 |
| 0.15 | 0.301455 | -0.080866 | 0.363468 | 0.405961 | 0.992848 | 1.044168 | 0.979721 | 0.993723 |
| 0.10 | 0.167739 | -0.210346 | 0.267316 | 0.321696 | 0.985039 | 1.049726 | 0.968135 | 0.988078 |
| 0.05 | 0.057807 | -0.300114 | 0.186039 | 0.251438 | 0.965382 | 1.039775 | 0.950411 | 0.978262 |
| 0.01 | -0.007968 | -0.342908 | 0.131631 | 0.204328 | 0.939224 | 1.012308 | 0.929660 | 0.965224 |

Quadro 5-9: Grandezas estruturais obtidas para diferentes níveis de distorção da malha.

Conclui-se que o modelo apresenta pouca sensibilidade à distorção da malha, pois o erro máximo obtido para a aproximação 4, foi sempre inferior a 7.1%, mesmo para valores elevados da distorção ($\gamma = 0.01$). Tal deve-se essencialmente ao elevado número de graus de liberdade do modelo, permitindo que a geometria da malha não altere de forma significativa a solução final.

É no entanto importante verificar que com a diminuição do número de graus de liberdade, através da diminuição do grau máximo das funções utilizadas (aproximação 1), a sensibilidade à distorção aumenta drasticamente, tendo-se obtido erros face à solução com a malha sem distorção, superiores a 100%. Procurou-se ilustrar este efeito nos gráficos apresentados na Figura 5-18.

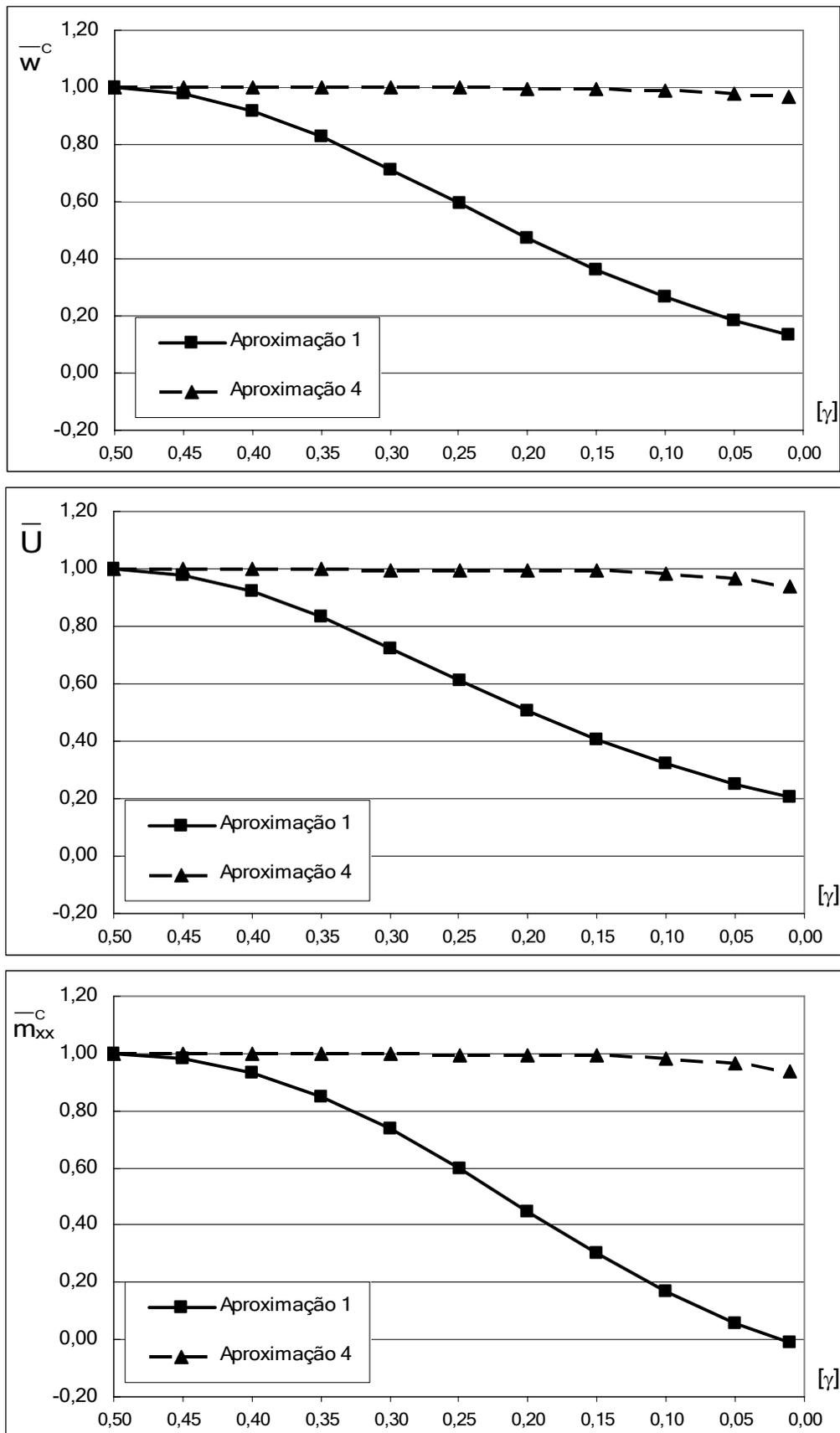


Figura 5-18: Grandezas de comparação obtidas para diferentes níveis de distorção da malha.

5.3 - ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS

As análises elastoplásticas de placas foram efectuadas com recurso ao modelo elastoplástico HMT implementado no programa *Placa-Leg*. Os exemplos efectuados procuraram caracterizar o seu desempenho em três aspectos principais: em primeiro lugar efectuou-se um estudo à eficiência das diferentes técnicas de controlo da cedência. Para isso, foi analisado um conjunto de casos em que se varia tanto o tipo de técnica, como a densidade da malha de controlo. Sempre que possível, mantiveram-se inalterados os parâmetros não directamente relacionados com o controlo da cedência, de forma a isolar convenientemente os seus efeitos. Os resultados obtidos foram comparados com a informação proveniente de outros modelos numéricos, de forma a aferir a qualidade dos resultados fornecidos pelo programa. Outro objectivo deste capítulo consiste em efectuar análises com critérios de cedência adaptados à modelação de materiais com resistência combinada atrito e coesão, nomeadamente o critério de Mohr-Coulomb e o critério de Drucker-Prager. Nestas análises utilizaram-se estruturas simples, para que fosse mais fácil tirar conclusões sobre os resultados obtidos. Assim sendo, como último objectivo dos exemplos com placas, procurou testar-se o modelo na análise de um caso mais complexo e de maior dimensão, tendo-se escolhido para o efeito, uma viga bi-encastada com um troço de carga uniforme a meio vão.

No que diz respeito ao programa *Placa-Leg*, o seu algoritmo engloba cerca de 30 rotinas exclusivamente de cálculo. No entanto, o número total de rotinas eleva-se às várias centenas, pois foi desenvolvida uma interface gráfica para o algoritmo. O programa foi estruturado em três grandes módulos (pré-processamento, processamento, pós-processamento). Mais uma vez, a saída dos resultados é feita recorrendo às rotinas de visualização *Toolvis*, desenvolvidas para este trabalho.

Para definir as aproximações, é necessário fornecer ao programa o conjunto de parâmetros (g_{sv} , g_{uv} , g_{uy}) que representam, respectivamente, o grau máximo da aproximação para os campos de tensões no domínio, de deslocamentos no domínio e de deslocamentos nas fronteiras estáticas. Desta forma, cada aproximação fica definida pela combinação, em uma ou duas direcções, das funções de Legendre de grau zero até ao respectivo grau máximo, definido por cada um dos parâmetros anteriores. Salienta-se que a combinação dos graus máximos das aproximações é definida, mais uma vez, de forma a evitar a presença de dependências lineares no sistema governativo. Assim sendo, o grau máximo dos campos de tensões deve ser sempre superior ao grau máximo dos campos de deslocamentos.

Em todos os problemas apresentados neste capítulo, foram definidos 3x3 pontos de Gauss nas células plásticas e as seguintes tolerâncias ($Tol_{\Phi} = 1 \times 10^{-11}$) e ($Tol_R = 1 \times 10^{-12}$).

5.3.1 - ANÁLISE DAS TÉCNICAS DE CONTROLO DE CEDÊNCIA

Para estudar a eficiência das técnicas de controlo da cedência implementadas, analisou-se uma placa quadrada em consola sujeita a uma carga uniforme no topo (Figura 5-19). A estrutura foi discretizada recorrendo a apenas um elemento finito e implementou-se o critério de cedência de von Mises.

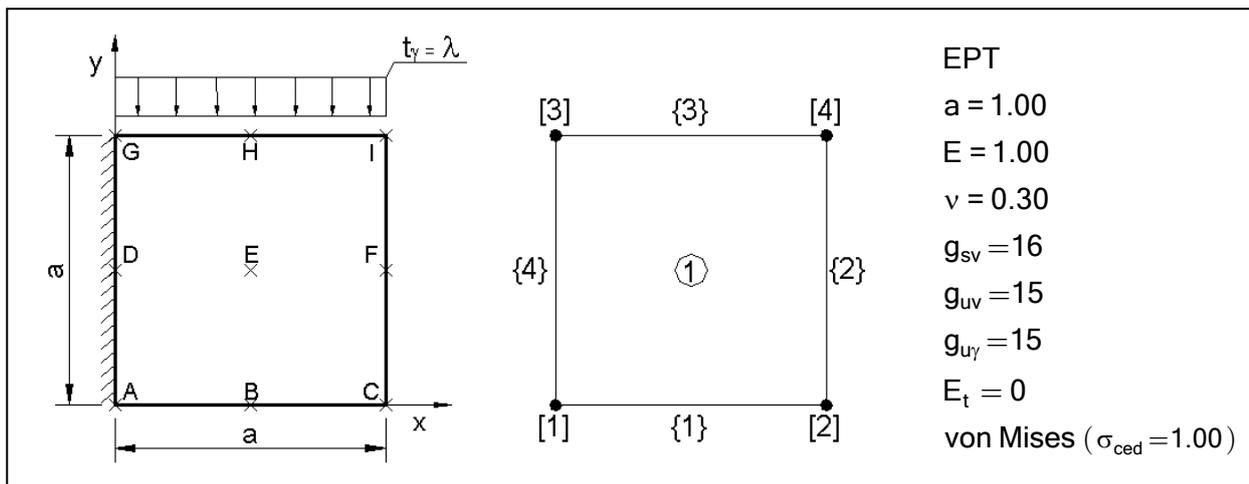


Figura 5-19: Definição das características da placa quadrada em consola.

Para aferir a qualidade dos resultados obtidos do programa *Placa-Leg*, efectuou-se a análise deste mesmo exemplo com um programa de elementos finitos comercial (A.D.I.N.A. [1]). Este programa utiliza a formulação de elementos finitos tradicionais (formulação de deslocamentos) e para o caso em estudo, recorre a um modelo de plasticidade associada. A consola foi analisada recorrendo a 225 elementos 2D de 8 nós e obtiveram-se os resultados apresentados na Figura 5-20.

Estes resultados foram considerados como valores de referência para as análises efectuadas com o modelo HMT. Comparou-se tanto o valor final do parâmetro de carga ($\lambda_{ref} = 0.4215$), como a evolução do diagrama carga vs magnitude do deslocamento do ponto F (Figura 5-19).

Para se estudar a eficiência das técnicas de controlo da cedência foram elaborados 16 modelos, definidos com diferentes combinações de pontos de colocação e de células plásticas (Quadro 5-10). Era possível definir pontos de colocação localizados em pontos de Gauss ou em pontos de Lobatto. No entanto, optou-se por definir uma malha uniforme de pontos equidistantes entre si. Foram utilizadas células plásticas com uma, quatro e nove funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos (P_*), a que designaremos simplifadamente neste capítulo por *CEL1*, *CEL4* e *CEL9*.

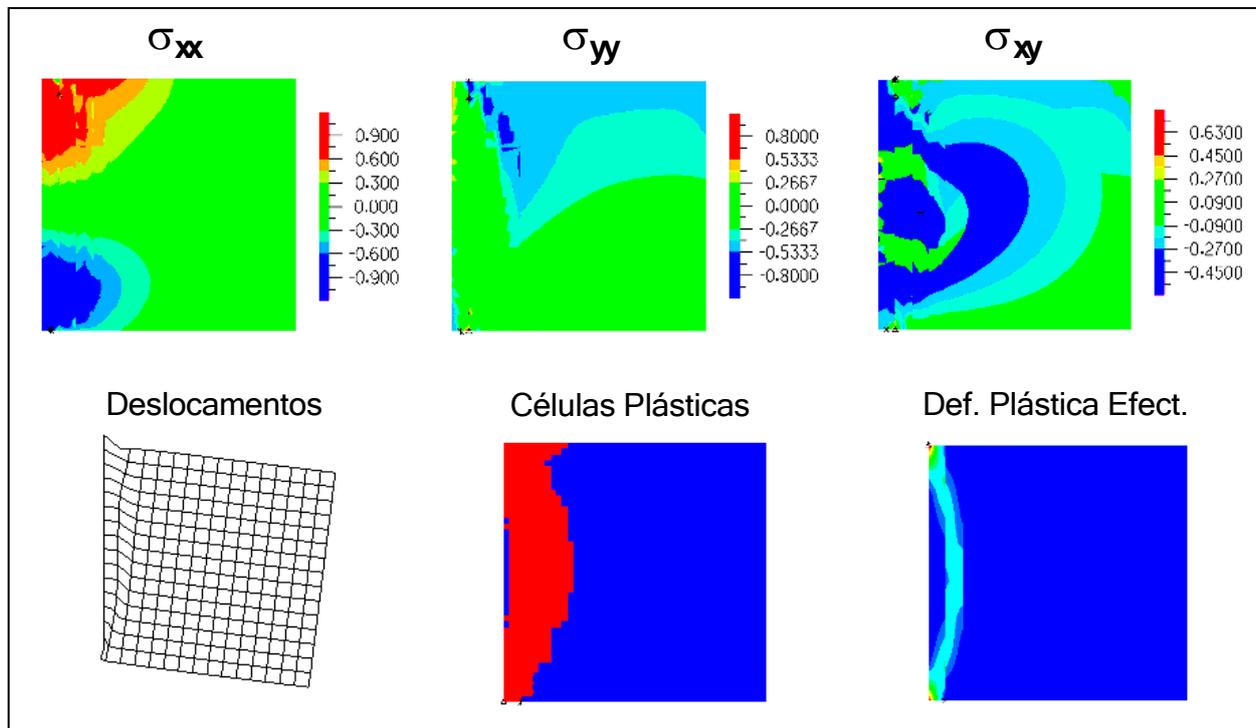


Figura 5-20: Resultados de um programa de elementos finitos tradicionais (adap. de [1]).

| DESIGNAÇÃO | Tipo de Controlo Cedência | nº Pontos de Colocação | nº Células Plásticas | nº Modos de Cedência |
|------------|---------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| MODELO 1 | Pontos de Colocação | 10x10=100 | 0 | 100 |
| MODELO 2 | Pontos de Colocação | 15x15=225 | 0 | 225 |
| MODELO 3 | Pontos de Colocação | 20x20=400 | 0 | 400 |
| MODELO 4 | Pontos de Colocação | 30x30=900 | 0 | 900 |
| MODELO 5 | Células Plásticas - CEL1 | 0 | 5x5=25 | 25 |
| MODELO 6 | Células Plásticas - CEL1 | 0 | 10x10=100 | 100 |
| MODELO 7 | Células Plásticas - CEL1 | 0 | 15x15=225 | 225 |
| MODELO 8 | Células Plásticas - CEL1 | 0 | 20x20=400 | 400 |
| MODELO 9 | Células Plásticas - CEL4 | 0 | 5x5=25 | 100 |
| MODELO 10 | Células Plásticas - CEL4 | 0 | 10x10=100 | 400 |
| MODELO 11 | Células Plásticas - CEL4 | 0 | 15x15=225 | 900 |
| MODELO 12 | Células Plásticas - CEL4 | 0 | 20x20=400 | 1600 |
| MODELO 13 | Células Plásticas - CEL9 | 0 | 5x5=25 | 225 |
| MODELO 14 | Células Plásticas - CEL9 | 0 | 10x10=100 | 900 |
| MODELO 15 | Células Plásticas - CEL9 | 0 | 15x15=225 | 2025 |
| MODELO 16 | Células Plásticas - CEL9 | 0 | 20x20=400 | 3600 |

Quadro 5-10: Características dos modelos analisados - Controlo da cedência.

Foi necessário definir o ponto de paragem para o cálculo, pois da forma como o modelo numérico está definido, o cálculo evolui com incrementos de carga muito pequenos que vão dando origem a deformações muito grandes. Definiu-se para todos os modelos analisados, que

o colapso da estrutura, e o conseqüente final do cálculo, acontece sempre que a magnitude do deslocamento no ponto F (δ_f), obtido da aproximação do campo de deslocamentos no domínio, for igual ou superior a dez ($\delta_f \geq 10$). Este valor numérico foi escolhido pelas seguintes razões: em primeiro lugar, é um valor que está associado a uma resposta da estrutura na sua globalidade plástica e por outro lado os incrementos de carga nesta fase são já muito pequenos. Ao valor do parâmetro de carga obtido nesse instante, considerou-se como o valor de colapso da estrutura e denominou-se por (λ_u).

Nas figuras 5-21 a 5-25 representam-se os campos de tensões ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$), os campos de deslocamentos no domínio (u_v), os modos de cedência activos (a vermelho) e o gráfico carga-deslocamento ($\lambda - \delta_f$), respectivamente para os modelos 4, 8, 12 e 15. A Figura 5-21 ilustra a situação da estrutura do Modelo 4 no final do incremento de carga onde se activa o primeiro modo de cedência, enquanto que as restantes referem-se ao final do incremento de carga onde foi atingida a condição de colapso convencionada.

No Quadro 5.11 apresentam-se os resultados obtidos para a carga última nos diferentes modelos analisados.

| | δ_f | λ_u | $\lambda_u / \lambda_{ref}$ |
|-----------|------------|-------------|-----------------------------|
| MODELO 1 | 10.00 | 0.8157 | 1.9352 |
| MODELO 2 | 10.00 | 0.6311 | 1.4972 |
| MODELO 3 | 10.00 | 0.5755 | 1.3652 |
| MODELO 4 | 10.00 | 0.4237 | 1.0053 |
| MODELO 5 | 3.4981 | 0.57808 | 1.3715 |
| MODELO 6 | 10.00 | 0.44606 | 1.0583 |
| MODELO 7 | 10.00 | 0.4318 | 1.0244 |
| MODELO 8 | 10.00 | 0.4226 | 1.0026 |
| MODELO 9 | 3.4614 | 0.5630 | 1.3358 |
| MODELO 10 | 10.00 | 0.4360 | 1.0344 |
| MODELO 11 | 10.00 | 0.4223 | 1.0019 |
| MODELO 12 | 10.00 | 0.4168 | 0.9889 |
| MODELO 13 | 10.00 | 0.6279 | 1.4897 |
| MODELO 14 | 10.00 | 0.4326 | 1.0264 |
| MODELO 15 | 10.00 | 0.4190 | 0.9941 |
| MODELO 16 | 10.00 | 0.4162 | 0.9874 |

Quadro 5-11: Valores finais para o parâmetro de carga (λ) - Modelos 1 a 16.

Salienta-se que para os modelos 5 e 9, a forma grosseira utilizada para o controlo da plasticidade, conduziu a situações em que não foi possível obter convergência, ou em que os incrementos de carga foram tão pequenos que levaram a considerar-se que a análise terminou prematuramente.

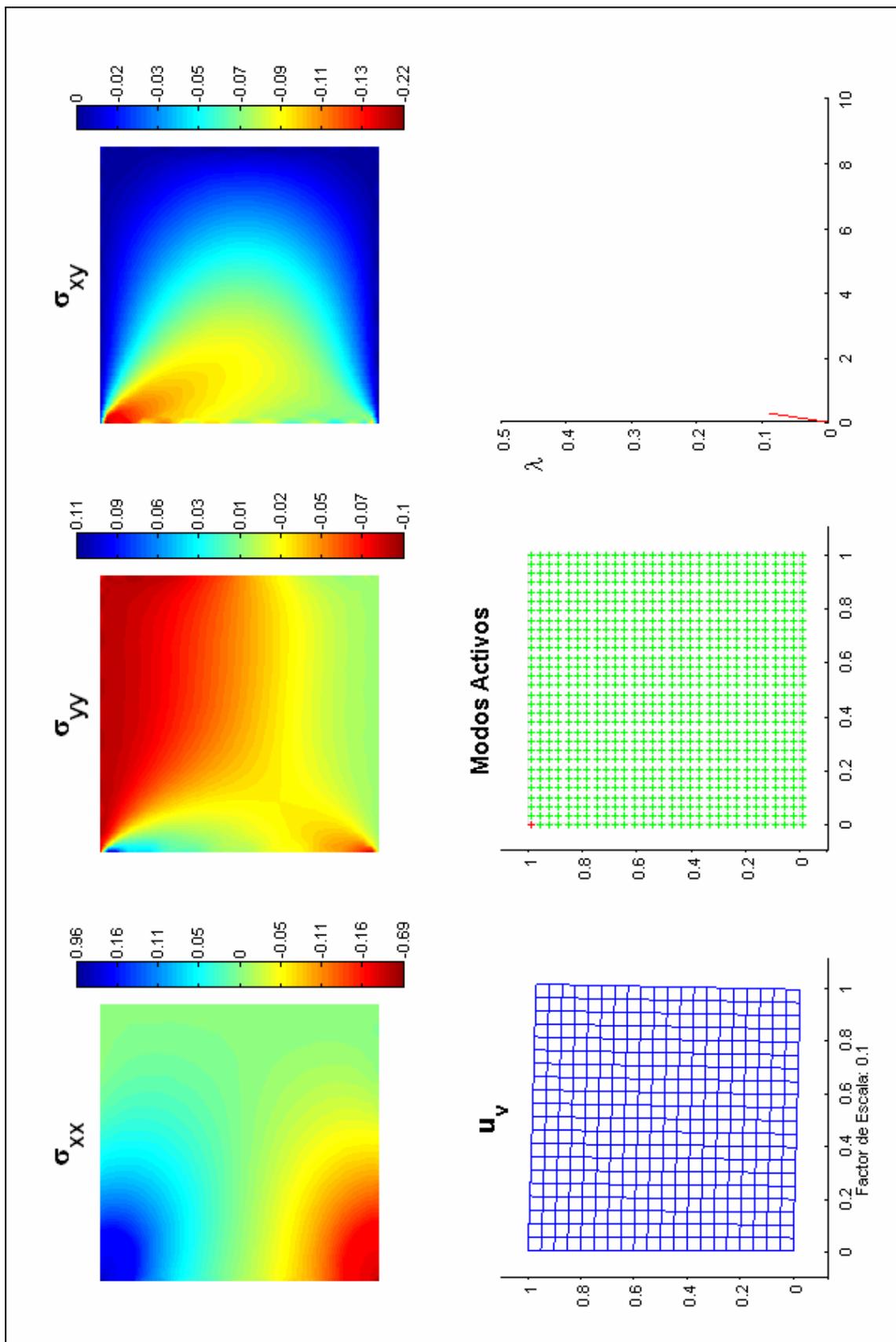


Figura 5-21: Resultados obtido para o Modelo 4 - Fim da fase elástica, Activação do primeiro modo de cedência.

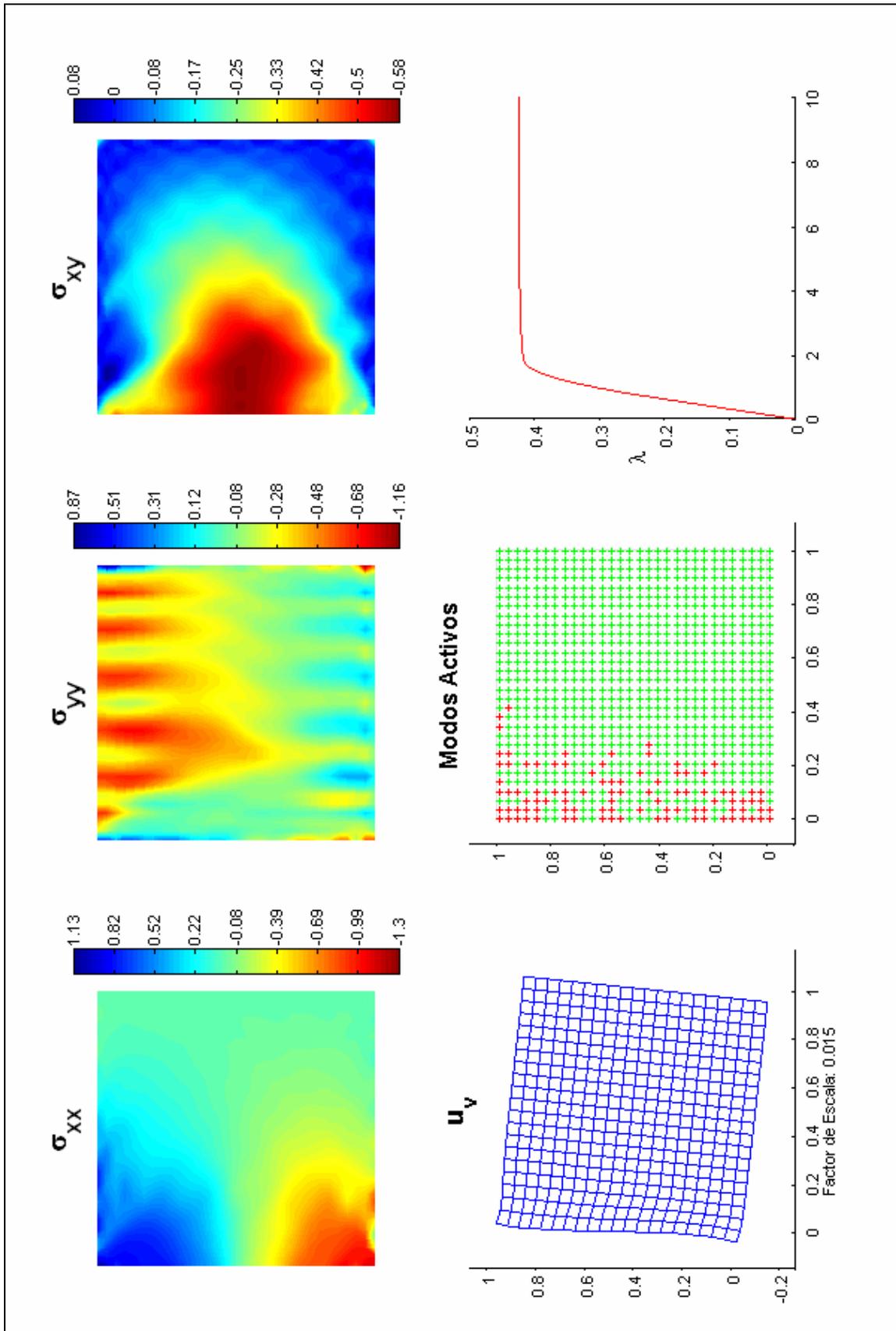


Figura 5-22: Resultados obtidos para o Modelo 4 - ($\delta_f = 10$).

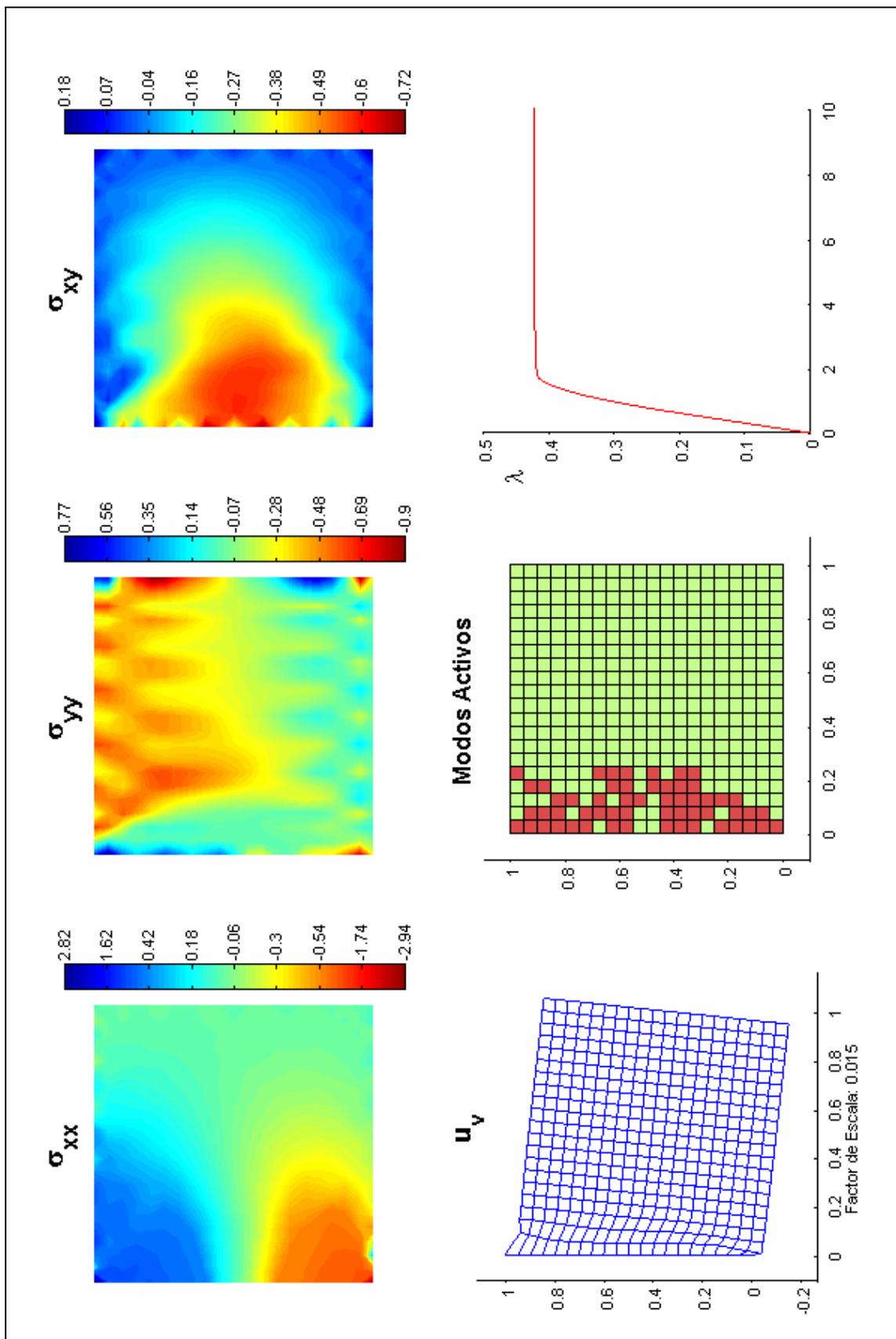


Figura 5-23: Resultados obtidos para o Modelo 8 - ($\delta_f = 10$).

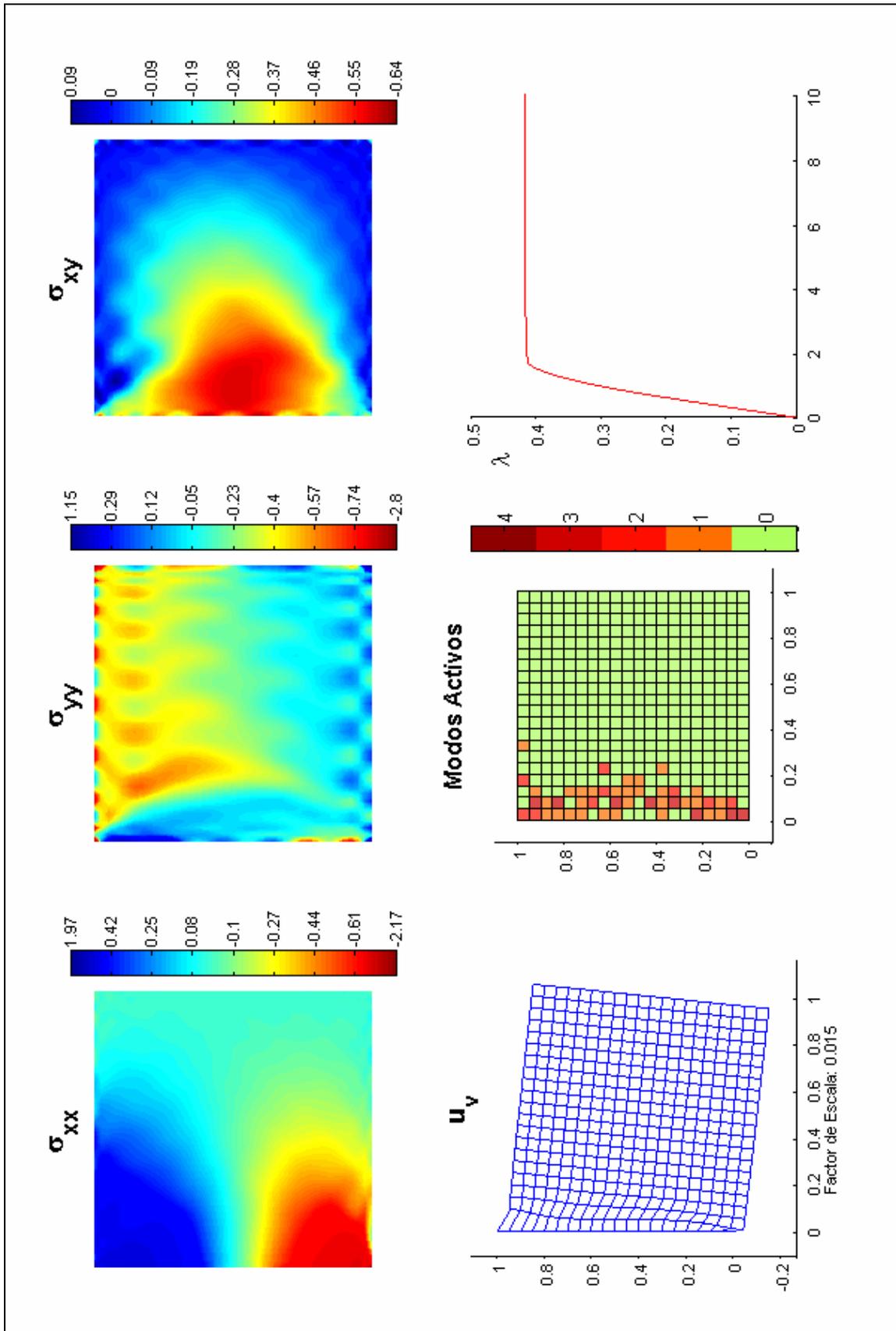


Figura 5-24: Resultados obtidos para o Modelo 12 - ($\delta_f = 10$).

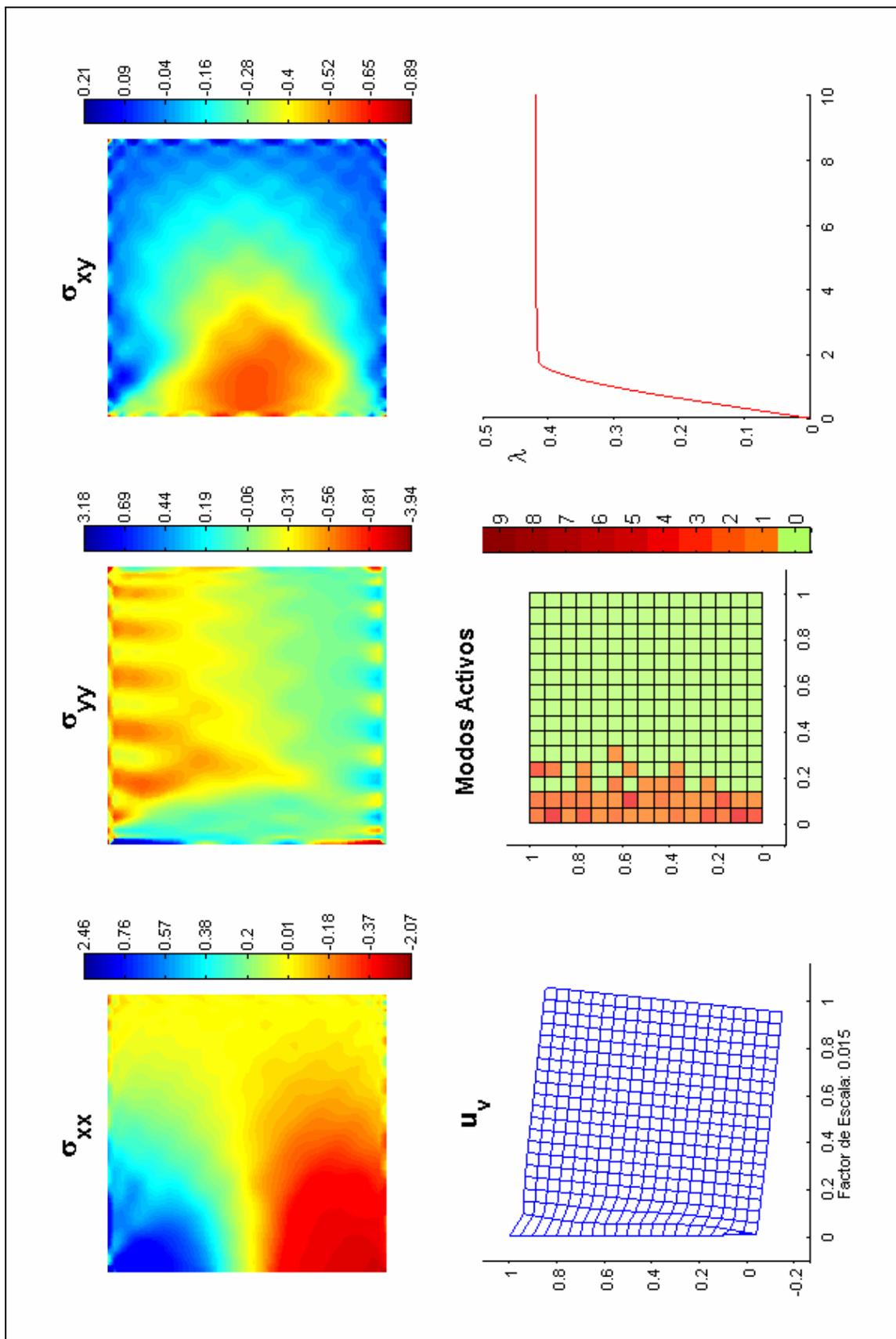


Figura 5-25: Resultados obtidos para o Modelo 15 - ($\delta_f = 10$).

As figuras 5-26 a 5-29 ilustram o andamento da relação entre o valor da carga (λ) e a magnitude do deslocamento no ponto F (δ_f), tendo sido agrupados os modelos em função da técnica de controlo ou do tipo de células plásticas.

Da comparação entre os resultados apresentados na Figura 5-26 e 5-27, observa-se que apenas no Modelo 4 (900 pontos de colocação) os resultados se aproximaram dos de referência, enquanto que para os Modelos 6, 7 e 8 (100, 225 e 400 células plásticas do tipo *CEL 1*) o andamento foi semelhante ao da curva de referência.

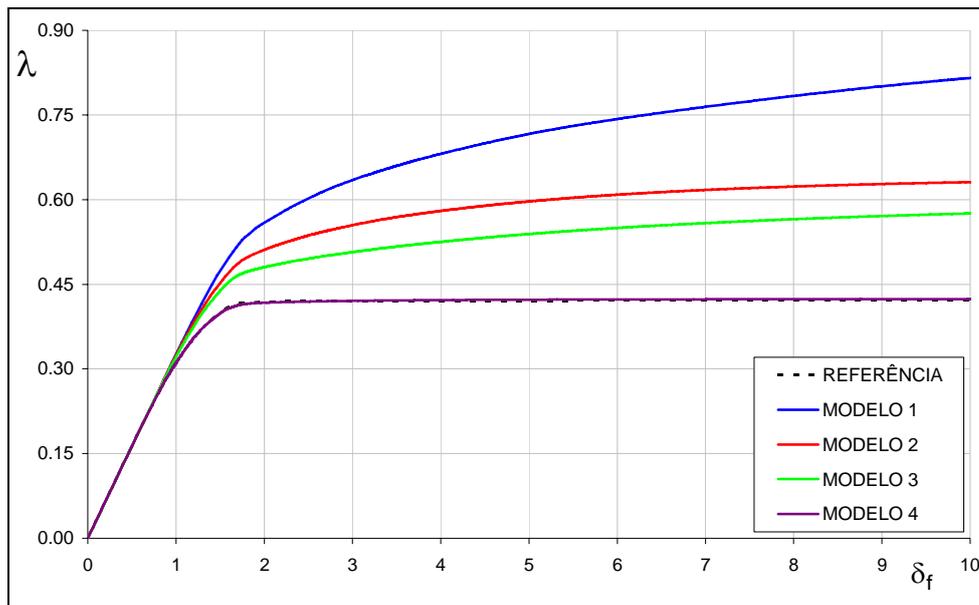


Figura 5-26: Gráfico Carga-Deslocamento - Pontos de Colocação.

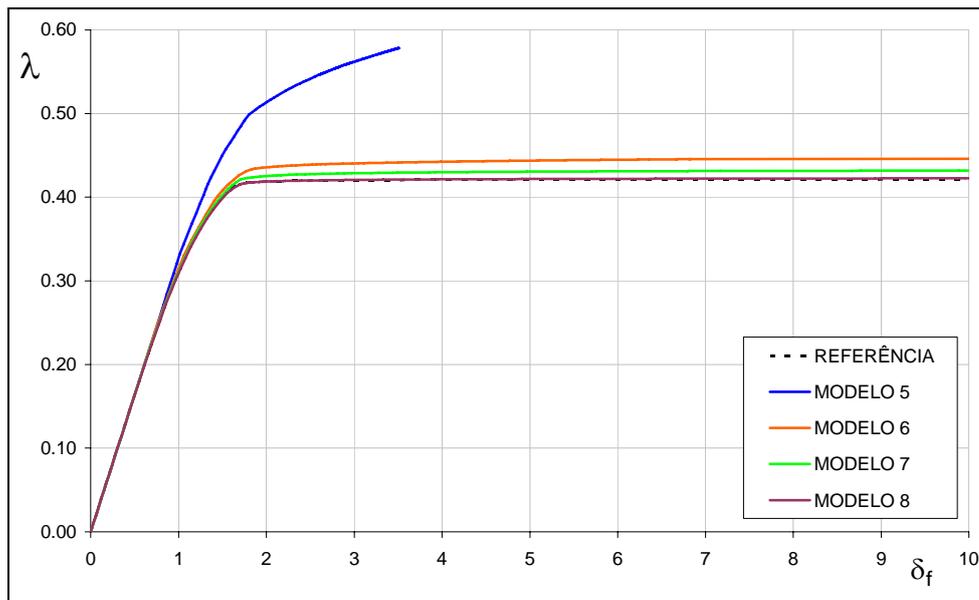


Figura 5-27: Gráfico Carga-Deslocamento - Células Plásticas do tipo *CEL 1*.

Da comparação dos resultados apresentados na Figura 5-28 e 5-29, conclui-se que a utilização de células plásticas do tipo *CEL9*, face às células tipo *CEL4*, traz poucos benefícios em termos da qualidade dos resultados, pois no que diz respeito aos andamentos obtidos e ao parâmetro de carga final (λ_u), os resultados são muito semelhantes. No entanto, é preciso salientar que o número de modos de cedência correspondentes à utilização de células do tipo *CEL9*, é superior ao dobro do que se obtém quando se adopta a utilização de células do tipo *CEL4*.

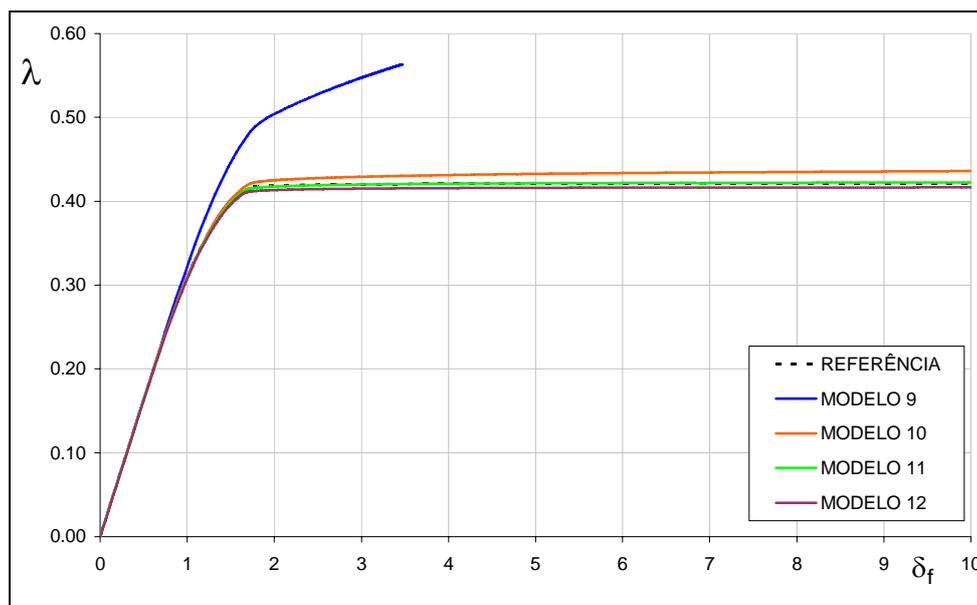


Figura 5-28: Gráfico Carga-Deslocamento - Células Plásticas do tipo *CEL4*.

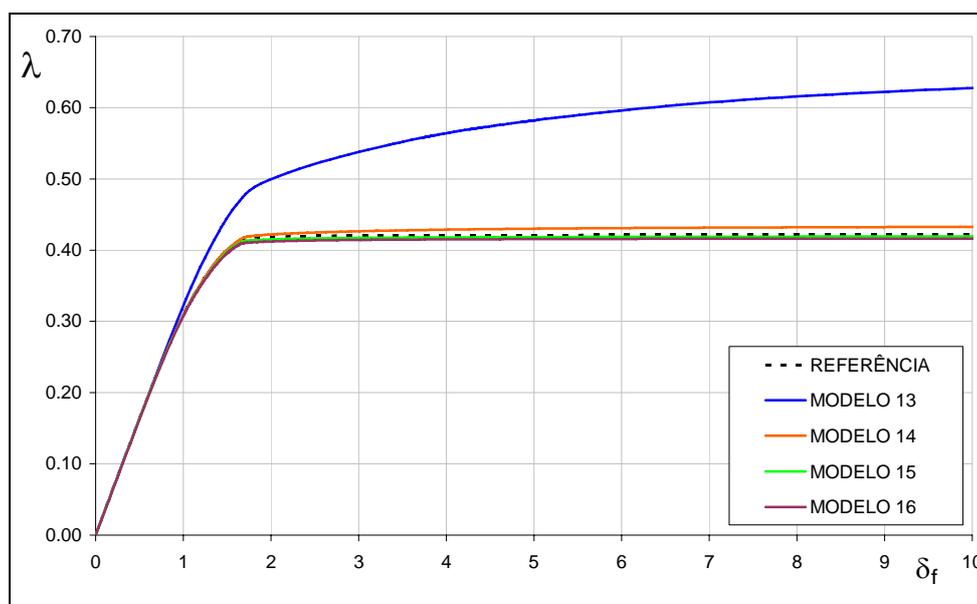


Figura 5-29: Gráfico Carga-Deslocamento - Células Plásticas do tipo *CEL9*.

Para melhor podermos comparar a eficiência das técnicas de controlo implementadas, ilustram-se na Figura 5-30 os resultados normalizados do parâmetro de carga último, face ao número de pontos de colocação ou células plásticas e na Figura 5-32 face ao número total de modos de cedência.

Da análise da Figura 5-30, sobressai mais uma vez o número elevado de pontos de colocação necessários à obtenção de soluções com resultados finais semelhantes aos de referência. Observa-se também que, para os diversos tipos de células plásticas, os resultados obtidos foram semelhantes. Assim sendo, a melhoria de resultados deu-se essencialmente com o aumento do número das células plásticas e não com o aumento do número de modos de cedência definidos em cada célula.

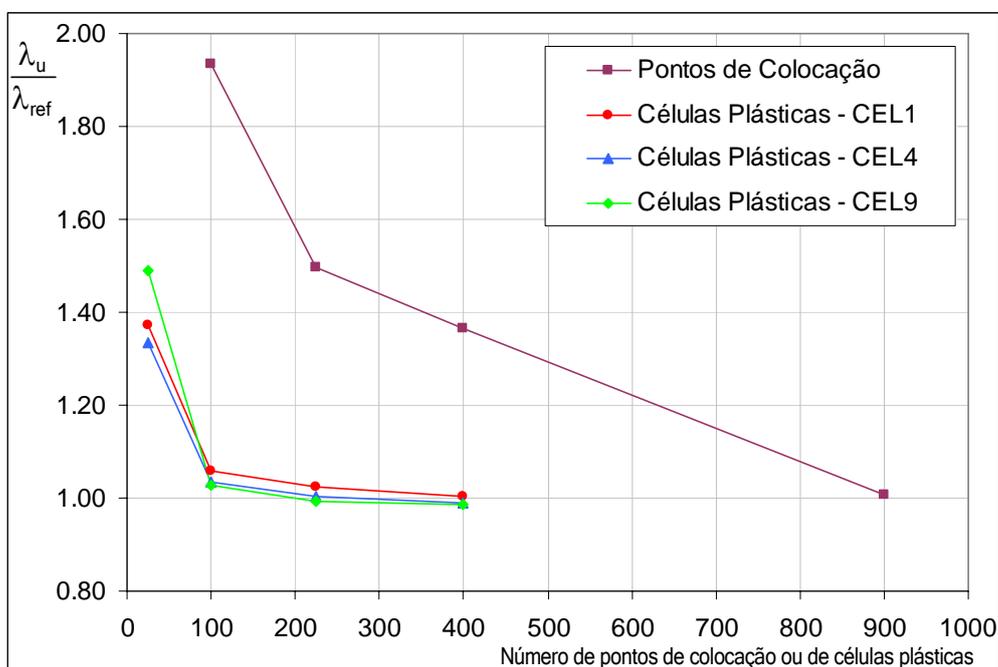


Figura 5-30: Comparação do valor final do parâmetro de carga com o número de pontos de colocação ou células plásticas.

Quando se compara a relação entre a qualidade dos resultados finais obtidos e o número de modos de cedência (Figura 5-31), conclui-se que as melhores relações são obtidas com as células plásticas tipo CEL1, enquanto que os piores resultados são obtidos com os pontos de colocação e com as células plásticas do tipo CEL9.

De acordo com estes resultados, desaconselha-se a utilização de células plásticas com um elevado número de modos de cedência, pois conforme se pode verificar facilmente nas Figuras 5-24 e 5-25, as respostas em regime elastoplástico desenvolveram-se activando em cada célula um número pequeno de modos de cedência. No entanto, há que ter em conta que uma maior variedade de funções de aproximação dos parâmetros plásticos (P_*), pode permitir uma

maior qualidade na simulação do aparecimento e desenvolvimento das deformações plásticas, embora neste caso não tivesse conduzido a uma melhoria significativa de resultados.

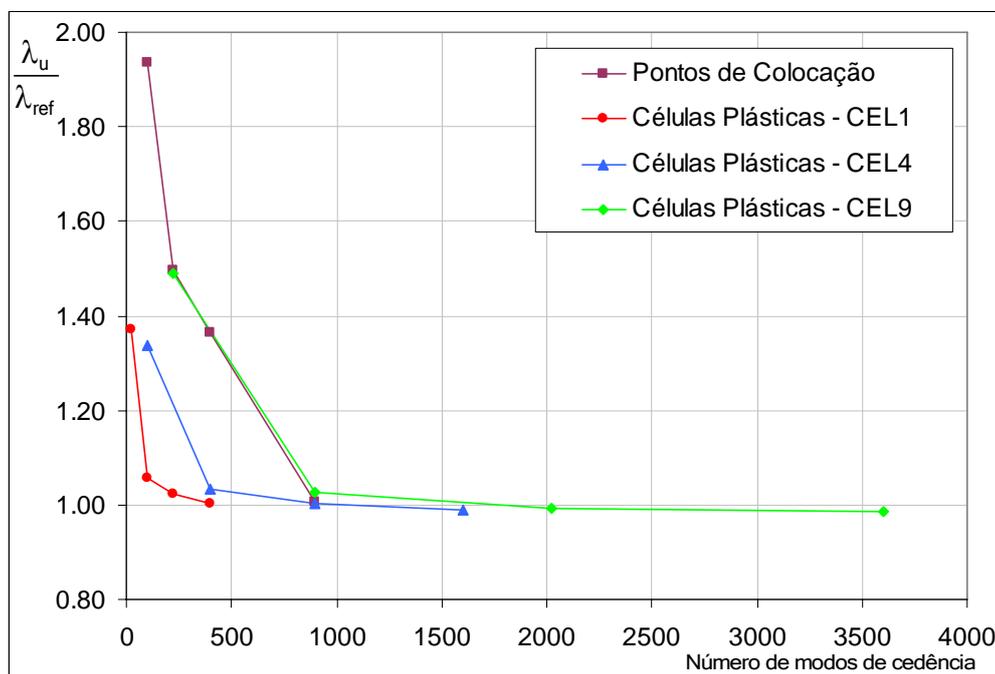


Figura 5-31: Comparação do valor final do parâmetro de carga com o número total de modos de cedência.

As Figuras 5-32 e 5-33 representam os campos de tensões (representados ao longo de cortes definidos na Figura 5.19) provenientes da análise do Modelo 4, obtidos respectivamente no final do incremento de carga onde se activa o primeiro modo de cedência (fim do comportamento elástico) e para a carga última da estrutura ($\delta_f = 10$).

Com as análises destes gráficos pretende-se identificar e discutir algumas situações de falta de equilíbrio e a tendência das funções de Legendre em gerar soluções com algumas oscilações.

Da análise da Figura 5-32 observa-se claramente dois comportamentos distintos. Nos cortes efectuados ao longo da fronteira onde é aplicada a carga (Corte G-I) e da fronteira do encastramento (Corte A-G), a solução obtida é claramente oscilante. Por outro lado nos cortes efectuados no interior dos elementos, a solução apresenta uma forma suave. O problema é causado pela alteração das condições de fronteira nos cantos (A, G) que fazem com que o modelo mobilize um polinómio de grau elevado de forma a representar de forma conveniente os gradientes elevados na zona dos cantos. Observa-se uma acentuada falta de equilíbrio entre a carga aplicada na fronteira G-I e a tensão (σ_{yy}), o que facilmente poderá introduzir comportamentos artificiais nas análises elastoplásticas, nomeadamente zonas que plastificam inesperadamente.

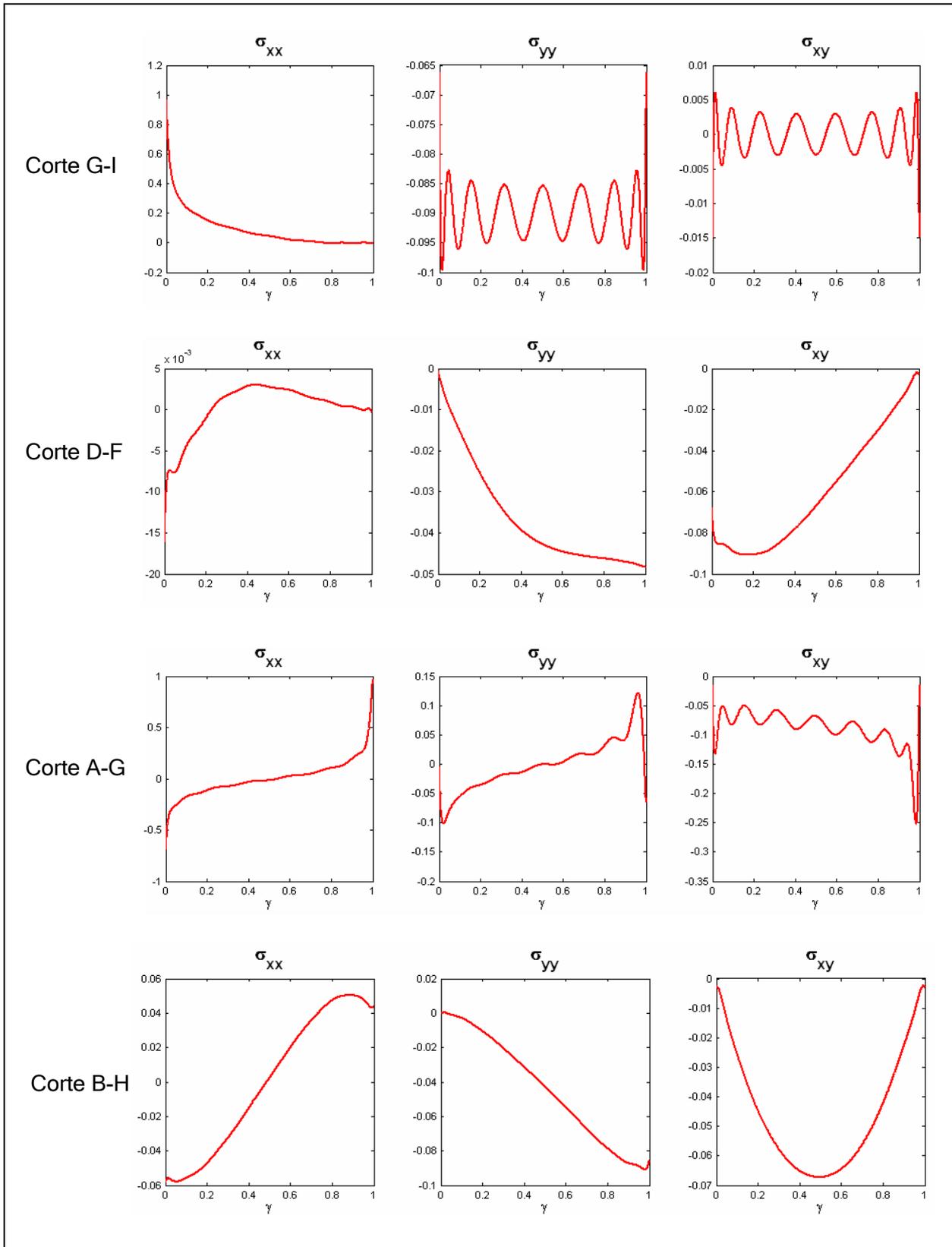


Figura 5-32: Representação dos campos de tensões ao longo de cortes - Modelo 4 ($\lambda=0.09$).

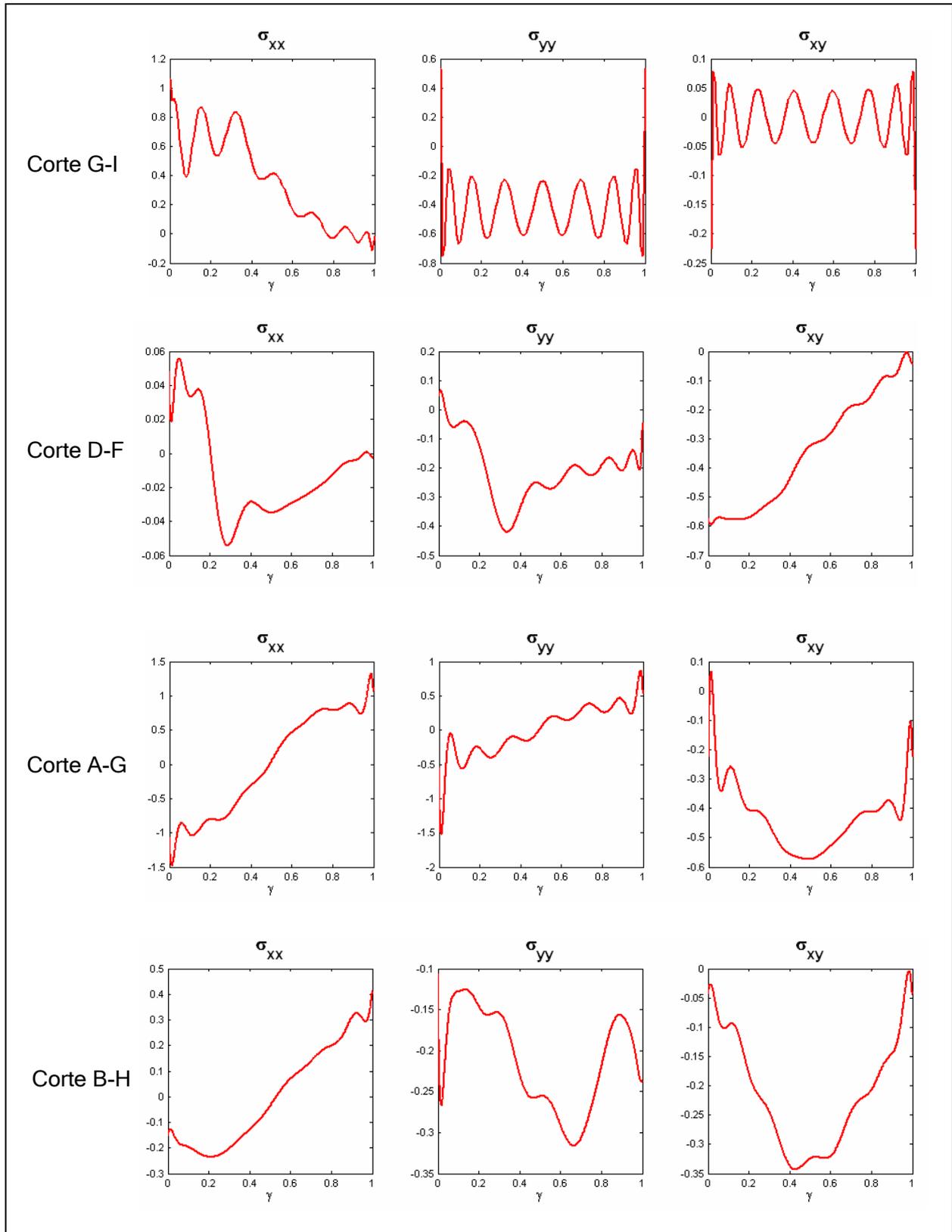


Figura 5-33: Representação dos campos de tensões ao longo de cortes - Modelo 4 ($\delta_f = 10$).

Na Figura 5-33 observam-se nas fronteiras dos elementos as mesmas oscilações e as mesmas faltas de equilíbrio identificadas anteriormente. No entanto, observa-se também um aumento das oscilações no interior. A sua principal causa está relacionada com as restrições que o modelo elastoplástico introduz à evolução do campo estático. Neste caso, estas restrições são aplicadas de forma pontual, facilitando a mobilização de gradientes elevados na sua proximidade e gerando consequentes oscilações no restante domínio.

Na sequência das análises efectuadas para o estudo da eficiência das diferentes técnicas de controlo da cedência, considerou-se pertinente estudar casos em que se utilizasse em simultâneo a técnica dos pontos de colocação e a técnica das células plásticas, a que designaremos por *Técnica Mista*. Procurou-se desenvolver e testar estratégias de controlo de cedência que permitissem obter soluções de melhor qualidade com recurso a um menor número de modos de cedência.

Analysaram-se dois modelos definidos com recurso às células plásticas do tipo CEL1, que conforme já foi referido, revelaram a melhor relação entre a qualidade dos resultados e o número de modos de cedência. Foi ainda incluído nas extremidades dos elementos um conjunto de pontos de colocação equidistantes, de forma a contrabalançar com um pequeno acréscimo de modos de cedência, o inconveniente da técnica das células plásticas associado ao facto de não controlar isoladamente os pontos nas extremidades dos elementos, onde se geram picos de tensão. As características destes modelos encontram-se indicadas no Quadro 5.12.

| DESIGNAÇÃO | Tipo de Controlo Cedência | nº Pontos de Colocação | nº Células Plásticas | nº Modos de Cedência |
|------------|---------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| MODELO 17 | Misto (CEL1+P.Colocação) | 42 | 100 | 142 |
| MODELO 18 | Misto (CEL1+P.Colocação) | 62 | 225 | 287 |

Quadro 5-12: Características dos modelos analisados com a *Técnica Mista*.

Os resultados obtidos encontram-se ilustrados nas Figura 5.34 e 5.35 e no Quadro 5-12, onde (Δ) representa o erro relativo referente à avaliação do valor da carga de rotura (λ_u).

| | Nº Modos de cedência | λ_u | $\lambda_u / \lambda_{ref}$ | Δ |
|-----------|----------------------|-------------|-----------------------------|----------|
| MODELO 6 | 100 | 0.44606 | 1.0583 | 5.83% |
| MODELO 7 | 225 | 0.4318 | 1.0244 | 2.44% |
| MODELO 8 | 400 | 0.4226 | 1.0026 | 0.26% |
| MODELO 17 | 142 | 0.43942 | 1.0425 | 4.25% |
| MODELO 18 | 287 | 0.42043 | 0.9975 | 0.25% |

Quadro 5-13: Valores finais para o parâmetro de carga (λ) - *Técnica Mista*.

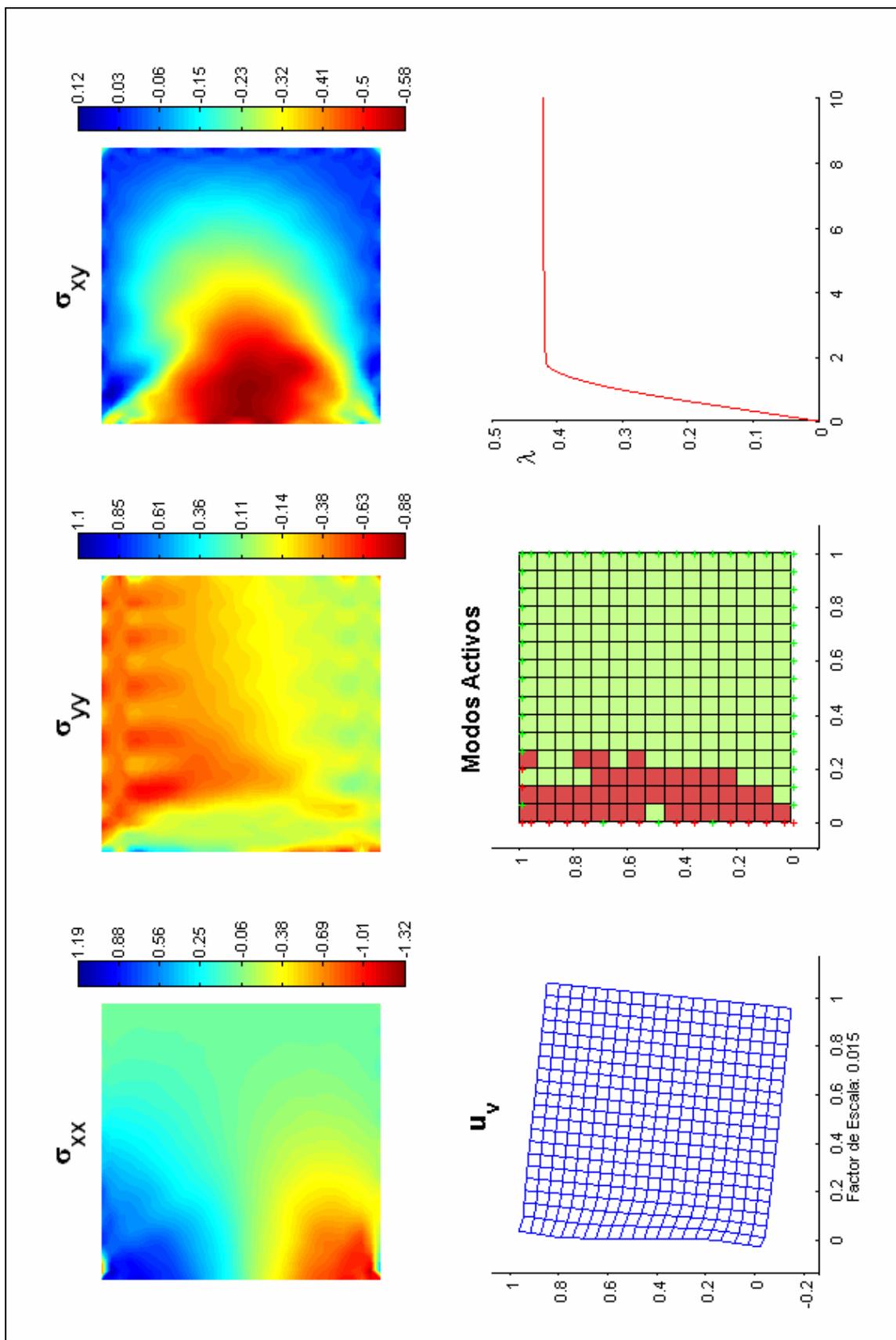


Figura 5-34: Resultados obtidos para o Modelo 18 - ($\delta_f = 10$).

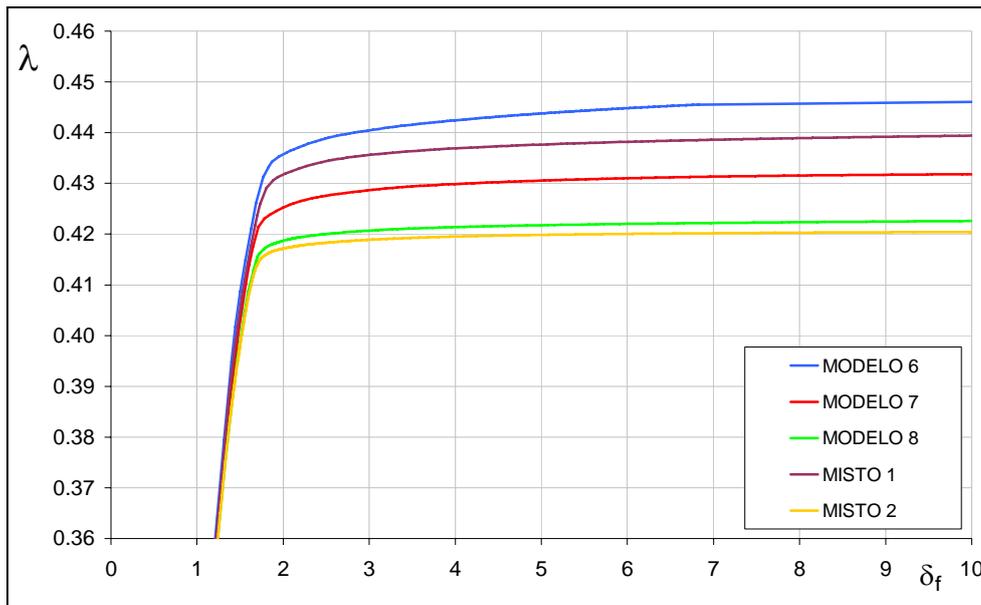


Figura 5-35: Gráfico Carga-Deslocamento - *Técnicas Mistas*.

Da análise do Quadro 5-13 e da Figura 5.35, observa-se que a qualidade da solução obtida pelo Modelo 17 superou a do Modelo 6, aproximando-se dos resultados do Modelo 7 que é definido com maior número de células e de modos. Já para a análise com o Modelo 18, os resultados obtidos superaram largamente os do Modelo 7, chegando mesmo a ser mais próximos da solução de referência (λ_{ref}) que os obtidos pelo Modelo 8.

Salienta-se que como as soluções obtidas não são nem equilibradas nem compatíveis, nada se pode concluir com base nos teoremas de análise limite. Apenas com considerações energéticas mais avançadas, seria possível estabelecer considerações sobre quais as melhores soluções. Esse tipo de análise sai fora do âmbito deste trabalho, tendo-se procurado apenas comparar os resultados obtidos com os provenientes do teste de referência.

Para ilustrar a evolução da activação dos modos de cedência, representa-se na figura 5-36, a sua evolução para a análise efectuada com o Modelo 18.

5.3.2 - IMPLEMENTAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE CEDÊNCIA ALTERNATIVOS

Conforme já foi referido, um dos objectivos deste trabalho consiste em implementar no modelo HMT, condições de cedência que permitam simular o comportamento de materiais com resistência combinada de atrito e coesão. Assim sendo, procurou-se implementar e testar os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager, definidos no Capítulo 4 e no Anexo E.

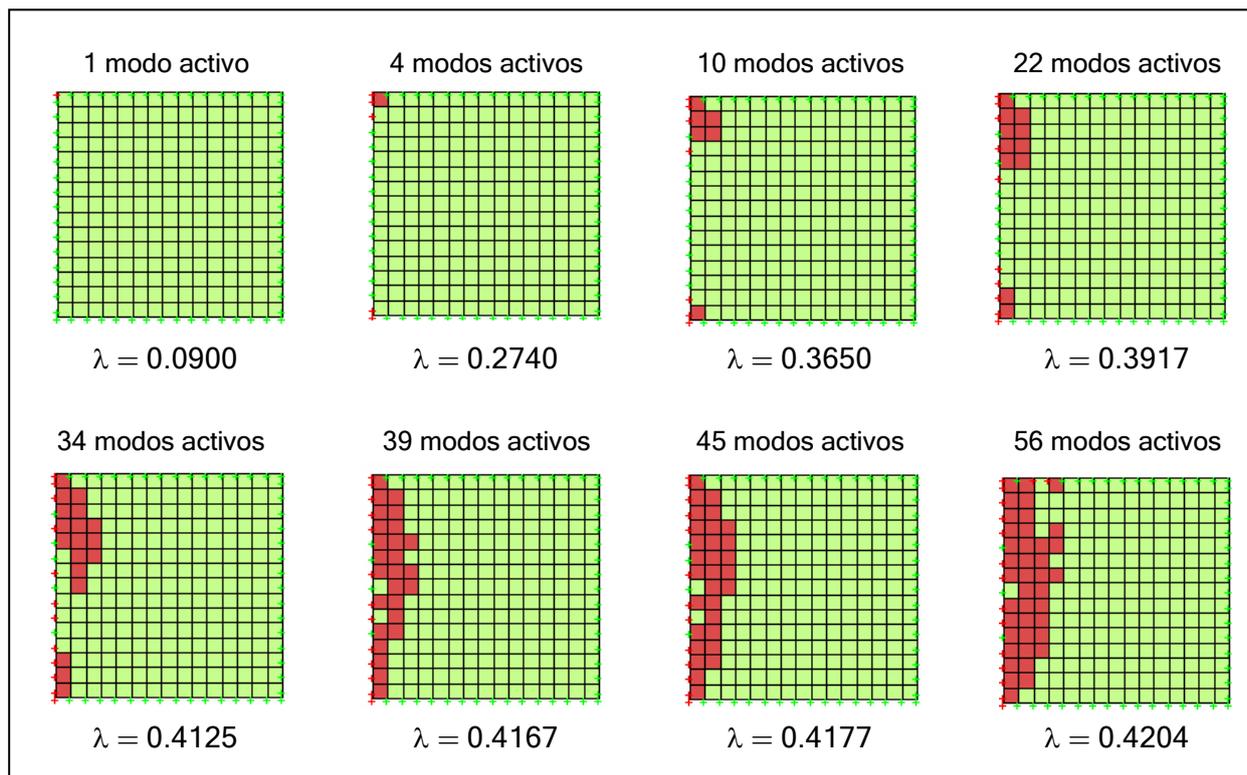


Figura 5-36: Evolução da activação dos modos de cedência - Modelo 18.

No que diz respeito ao critério de cedência Mohr-Coulomb, o autor testou algumas formas alternativas para a definição deste critério, assim como para as suas derivadas [35, 36, 67]. No entanto, todas as tentativas de análise de exemplos com esta condição de cedência terminaram prematuramente com falta de convergência. A maior complexidade na sua definição matemática e os problemas associados aos pontos onde as derivadas podem tomar valores múltiplos (arestas da superfície de cedência), conduziu a que se tivessem concentrado os esforços na aplicação da condição de cedência de Drucker-Prager. Este critério, para além de estar definido de forma a se aproximar ao critério de Mohr-Coulomb (através da definição dos parâmetros α e k), tem uma definição matemática mais simples e permite evitar os problemas numéricos nas arestas.

O critério de Drucker-Prager foi implementado no programa *Placa-Leg*. Para testar o seu desempenho, analisou-se mais uma vez a consola quadrada apresentada na Figura 5-19. Considerou-se um conjunto de exemplos definidos com pequenas variações do ângulo de atrito (ϕ) e com um valor fixo da coesão de $(\sqrt{3}^{-1})$, para que os resultados fossem da mesma ordem de grandeza dos que foram obtidos com a condição de cedência de von Mises.

Os resultados obtidos encontram-se ilustrados nas Figura 5.37 e 5.38 e no Quadro 5-14.

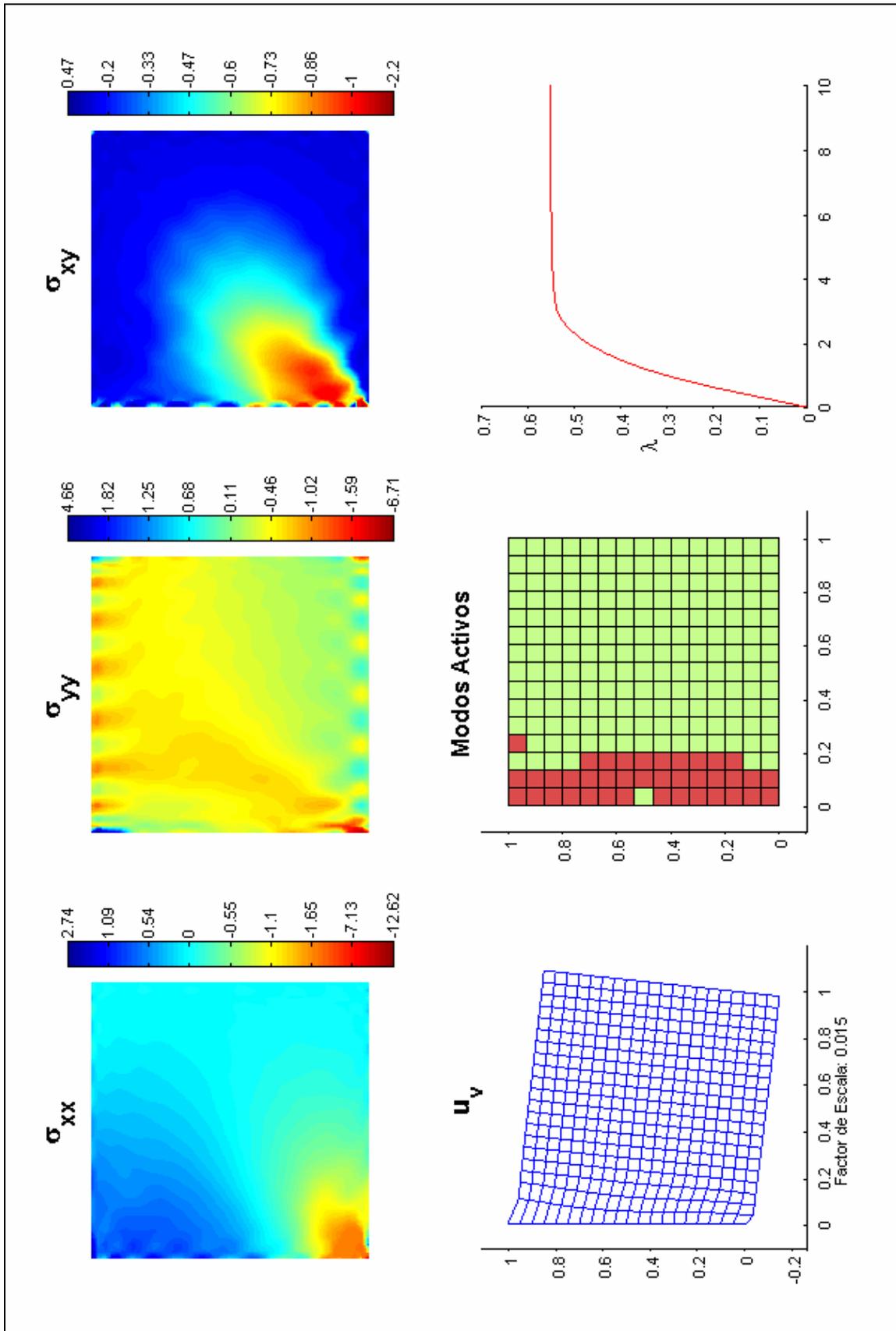


Figura 5-37: Resultados obtidos para o Modelo 25 - Modelo 25 - ($\delta_f = 10$).

A aplicação do critério de Drucker-Prager no modelo HMT desenvolvido conduziu à obtenção de bons resultados. A convergência foi obtida regra geral de forma eficiente, permitindo que a análise considerasse incrementos de carga maiores dos que puderam ser considerados na análise de exemplos semelhantes recorrendo ao critério de von Mises.

Da análise dos resultados obtidos, observa-se claramente a menor resistência à tracção do material, presente tanto na activação em primeiro lugar das células plásticas no topo do encastramento, pois o comportamento é predominantemente do tipo flexão, como no maior troço em tracção no encastramento (σ_{xx}) e consequente abaixamento da linha neutra. Observa-se também coerência nos valores finais do parâmetro de carga para os diversos valores do ângulo de atrito considerados (Figura 5-38), tendo-se obtido um parâmetro de carga mais elevado para o modelo definido com um ângulo de atrito de 30° .

| | c | ϕ [°] | δ_f | λ_u |
|-----------|----------|------------|------------|-------------|
| MODELO 19 | 0.577352 | 0 | 10 | 0.49844 |
| MODELO 20 | 0.577352 | 5 | 10 | 0.51282 |
| MODELO 21 | 0.577352 | 10 | 10 | 0.52528 |
| MODELO 22 | 0.577352 | 15 | 10 | 0.53561 |
| MODELO 23 | 0.577352 | 20 | 10 | 0.54361 |
| MODELO 24 | 0.577352 | 25 | 10 | 0.54896 |
| MODELO 25 | 0.577352 | 30 | 10 | 0.55124 |
| MODELO 26 | 0.577352 | 35 | 10 | 0.54979 |
| MODELO 27 | 0.577352 | 40 | 10 | 0.54350 |
| MODELO 28 | 0.577352 | 45 | 10 | 0.53063 |
| MODELO 29 | 0.577352 | 50 | 10 | 0.50842 |
| MODELO 30 | 0.577352 | 55 | 10 | 0.47539 |
| MODELO 31 | 0.577352 | 60 | 10 | 0.43182 |

Quadro 5-14: Valores finais para o parâmetro de carga (λ) - Critério de Drucker-Prager.

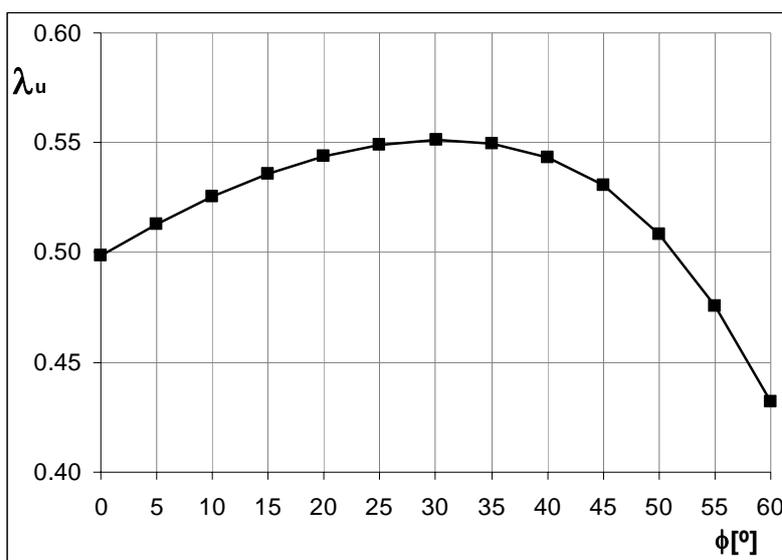


Figura 5-38: Evolução do parâmetro (λ_u) para os diferentes valores do ângulo de atrito.

5.3.3 - ANÁLISE DE VIGA BI-ENCASTRADA

Neste exemplo procurou-se analisar o desempenho do modelo HMT, para casos mais complexos e com maior dimensão (número de elementos e número de graus de liberdade). Foi analisada a viga bi-encastrada com um troço de carga uniforme a meio vão, representada na Figura 5-39.

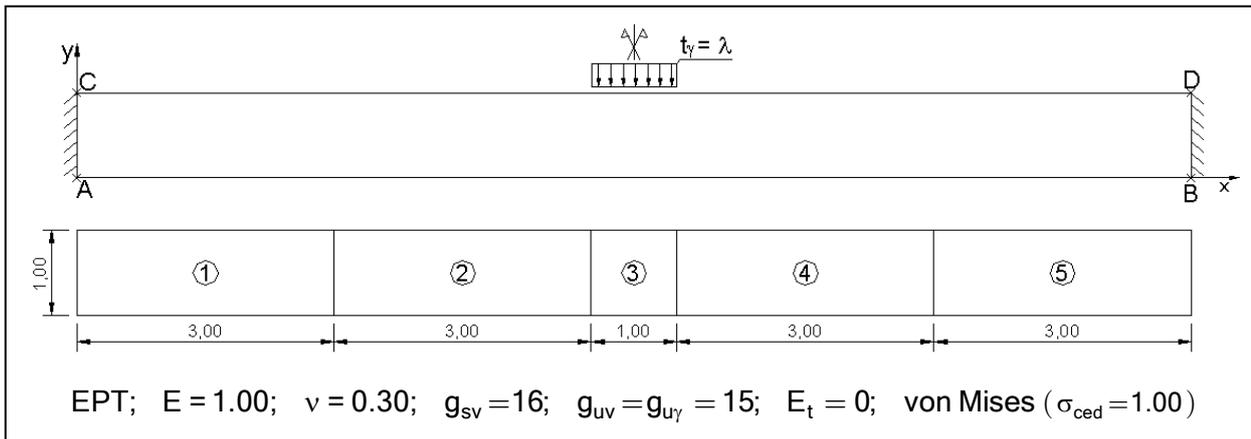


Figura 5-39: Definição das características da Viga Bi-Encastrada.

O controlo da plasticidade foi efectuado recorrendo a 390 células plásticas do tipo *CEL 1*, tendo-se definido malhas mais apertadas (maior densidade) nas zonas onde se previa o aparecimento de deformações plásticas (encastramentos e a meio vão).

Teria sido possível ter tirado partido da simetria da estrutura e do carregamento. No entanto, optou-se por analisar a totalidade da estrutura, de modo verificar se a solução obtida preserva a simetria.

Foi novamente necessário definir o ponto de paragem para o cálculo. Desta vez não se definiu um valor fixo, mas considerou-se que a estrutura não tinha mais rigidez quando os incrementos de carga fossem muito pequenos ($\Delta\lambda \approx 1.0e-007$), o que aconteceu para um valor do parâmetro de carga de ($\lambda = 0.1756$).

Na Figura 5-40 encontra-se representado os campos de tensões ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$), os campos de deslocamentos no domínio (u_v), os modos de cedência activos e o gráfico carga vs magnitude do deslocamento referente ao ponto de coordenadas (6.5;0.5). A Figura 5-41 ilustra a evolução da activação dos modos de cedência e na Figura 5-42 encontra-se representado um corte no campo de tensões, segundo a direcção C-D.

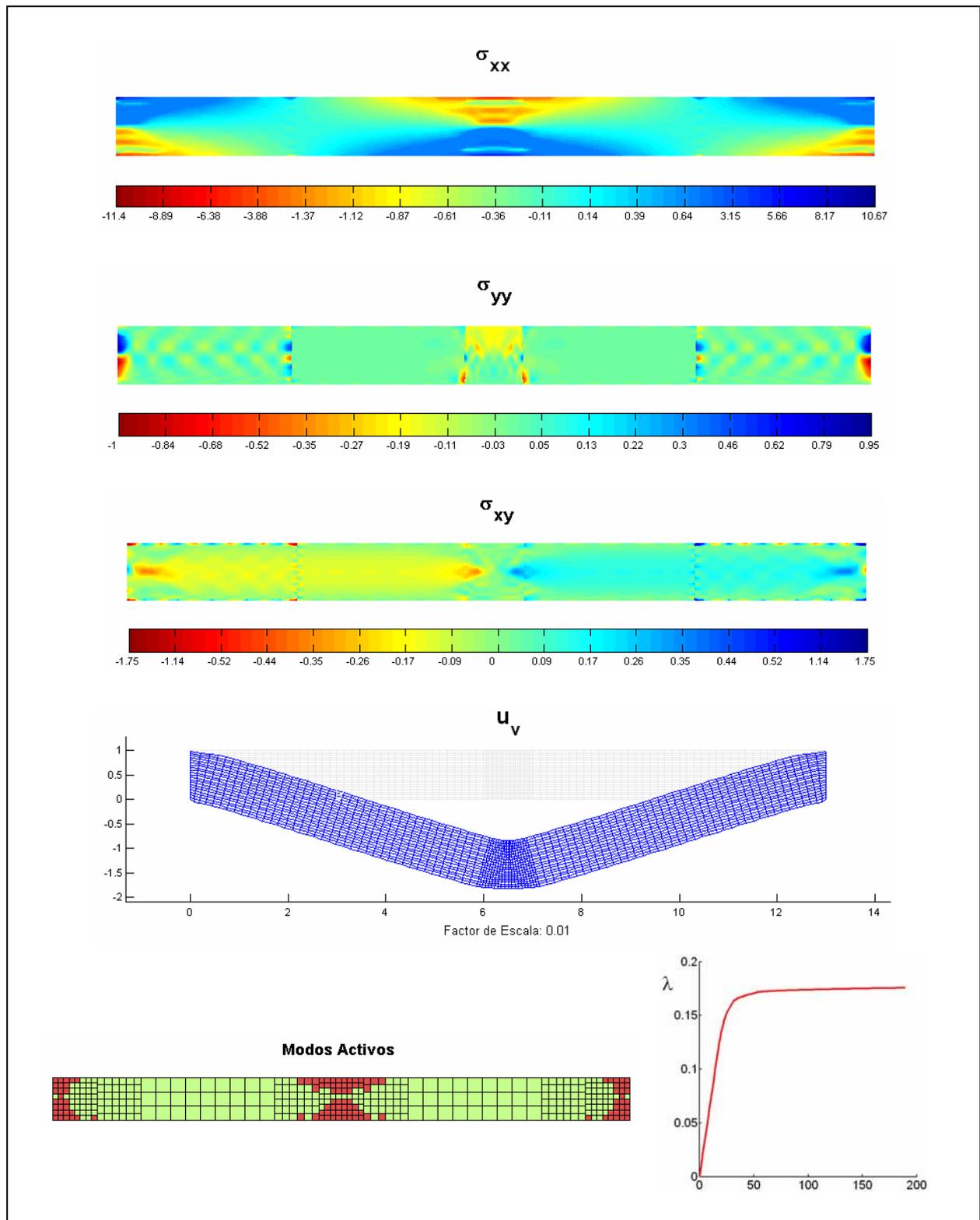


Figura 5-40: Resultados obtidos para o Modelo de Viga Bi-Encastrada, ($\lambda=0.1756$).

A solução obtida do ponto de vista do aparecimento e da evolução da plasticidade decorreu de forma espectacular e simétrica (Figura 5-41). Quanto ao campo de deslocamentos (u_v), observa-

se o aparecimento de deformações tipo rótula plástica nos encastramentos e a meio vão. No que diz respeito aos campos de tensões, estão mais uma vez presentes os problemas típicos dos modelos HMT já referidos anteriormente, nomeadamente falta de equilíbrio nas interfaces dos elementos e a falta de equilíbrio na fronteira onde é aplicada a carga (Figura 5.42).

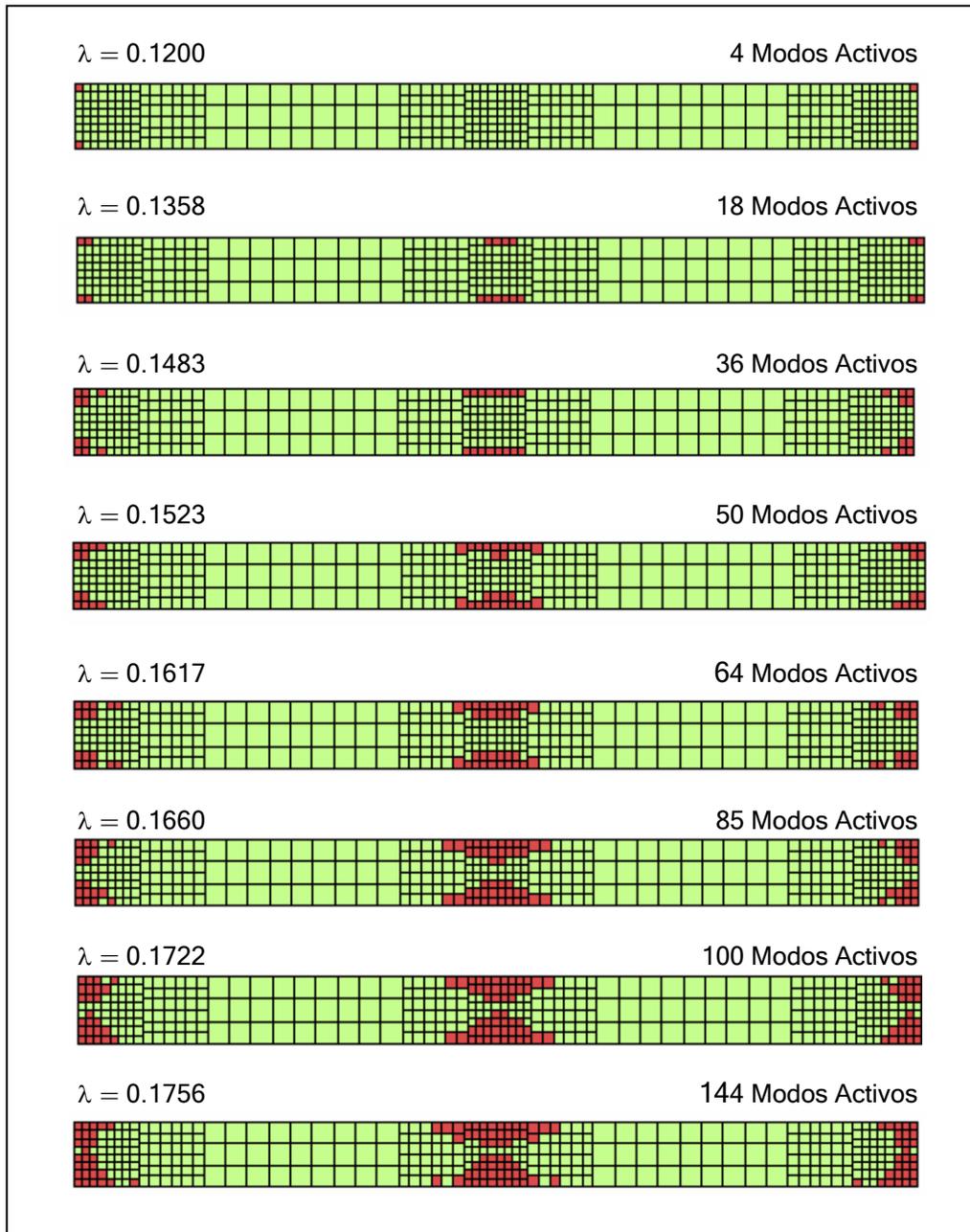


Figura 5-41: Evolução da activação dos modos de cedência - Viga Bi-Encastada.

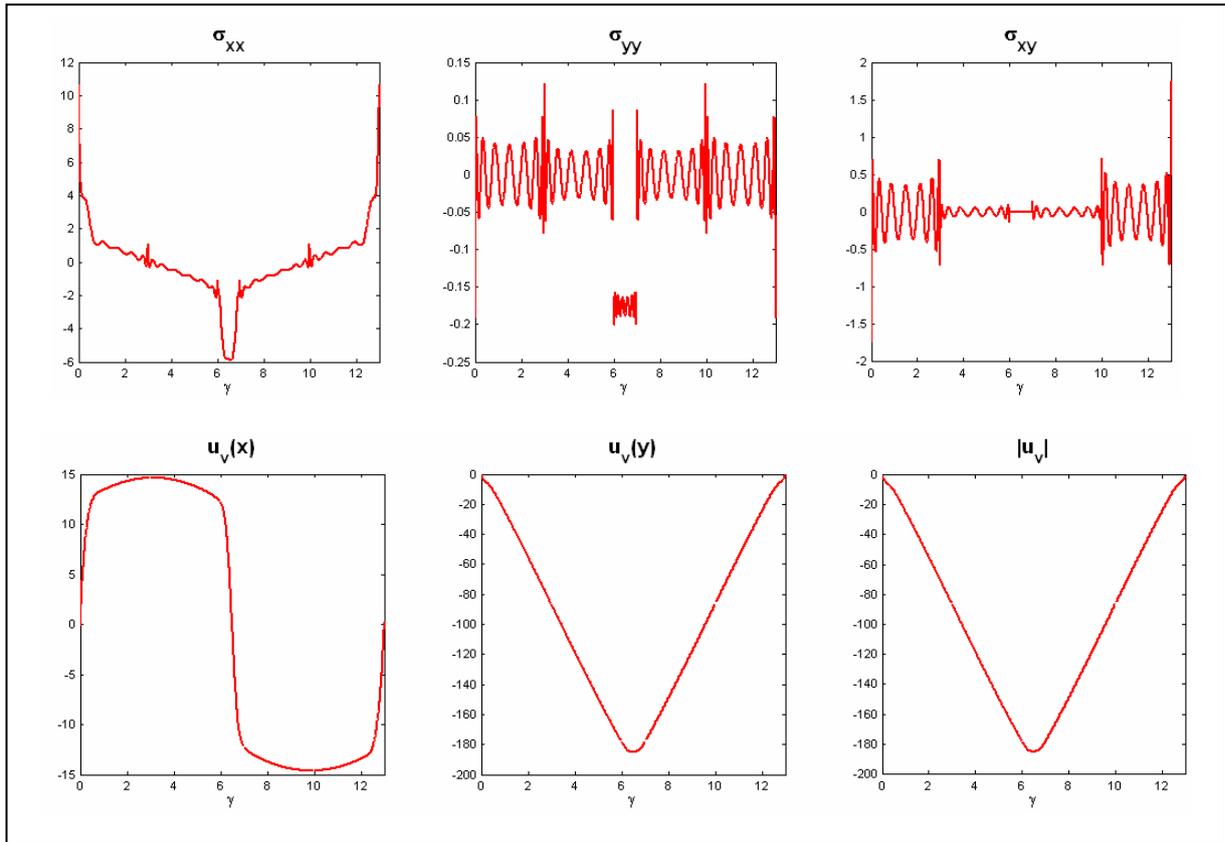


Figura 5-42: Representação dos campos de tensões ao longo do corte C-D, Viga Bi-Encastrada ($\lambda=0.1756$).

Capítulo 6

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

6.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo tem como objectivo apresentar as conclusões finais da dissertação. Identificam-se também os desenvolvimentos futuros que se prevêem mais relevantes na sequência deste trabalho.

O objectivo inicial do trabalho residia na elaboração de um modelo HMT para a análise elastoplástica de estruturas laminares planas. O modelo deveria ser caracterizado pela utilização do método de Newton-Raphson na resolução do sistema de equações não lineares e incorporar critérios de cedência que permitissem modelar materiais com resistência combinada de atrito e coesão. Outro objectivo deste trabalho consistia na implementação e no estudo de diferentes técnicas para o controlo da cedência, nomeadamente da técnica baseada em pontos de colocação e da técnica baseada na definição de células plásticas.

Para este efeito foram desenvolvidos dois programas de cálculo: o primeiro programa, denominado *Laje-Pol*, efectua a análise elástica de lajes de Reissner-Mindlin. É ainda caracterizado pela utilização de funções polinomiais na aproximação das grandezas estruturais. Posteriormente, foi desenvolvido um programa para a análise elastoplástica de placas (EPT e EPD), denominado por *Placa-Leg*. O programa utiliza funções de Legendre na aproximação

das grandezas estruturais e foi desenvolvido de modo a satisfazer os objectivos desta dissertação.

6.2 - CONCLUSÕES

Embora o modelo implementado no programa *Laje-Pol* não satisfaça a totalidade dos objectivos da dissertação e a sua implementação tenha tido um carácter de introdução às formulações não convencionais, os testes efectuados ao modelo implementado no programa *Laje-Pol* permitiram tirar conclusões que se consideram relevantes, justificando a sua inclusão nesta dissertação. Assim sendo, foi possível obter as seguintes conclusões:

- i) Para problemas de geometria simples, o modelo implementado no programa *Laje-Pol* revelou-se bastante eficaz, fornecendo soluções idênticas a outros modelos numéricos, ou mesmo quando disponíveis, a soluções obtidas por via analítica.
- ii) O refinamento da solução com base no incremento do grau máximo das funções de aproximação originou sistemas de equações com problemas de condicionamento, pois para graus elevados verifica-se uma crescente semelhança da forma das funções de aproximação utilizadas.
- iii) O refinamento da malha (refinamento- h) revelou-se eficaz como forma de aumentar a capacidade do modelo em recuperar soluções mais complexas. Este tipo de refinamento permite aumentar o número de graus de liberdade do modelo, evitando os já referidos problemas de mau condicionamento do sistema governativo. A única desvantagem identificada para esta técnica encontra-se relacionada com o aparecimento de desequilíbrios na interface de elementos adjacentes. No entanto, este efeito é atenuado quando se aumenta o número de elementos.
- iv) Para os exemplos mais complexos, com fortes singularidades, foi também possível obter soluções de boa qualidade. No entanto, ao contrário do que é usual nos modelos HMT, foram utilizadas técnicas de refinamento- h em detrimento da técnica de refinamento- p , a qual é usualmente a mais eficaz neste tipo de formulações.
- v) As análises efectuadas ao *locking* confirmaram a esperada insensibilidade dos modelos HMT a este efeito.
- vi) As análises de sensibilidade à distorção da malha demonstraram bom desempenho do modelo HMT implementado no programa *Laje-Pol*, mesmo para graus de distorção muito elevados.

- vii) Do ponto de vista do tempo de cálculo consumido nas análises dos exemplos apresentados nesta dissertação, o desempenho do programa foi de má qualidade. O que mais condiciona esse fraco desempenho são as elevadas dimensões do sistema governativo HMT, o facto de não ter sido possível estabelecer nenhuma relação de ortogonalidade entre as funções de aproximação, e por último, a falta da eficiência, deste ponto de vista, do ambiente computacional em que o programa foi desenvolvido.
- viii) Como conclusão final, desaconselha-se a utilização de modelos HMT definidos com este tipo de funções de aproximação, uma vez que não permitem explorar de forma eficiente todas as potencialidades dos modelos HMT. A sua principal desvantagem reside nos problemas numéricos que originam as funções de grau elevado, indo contra toda a "filosofia" de *macro-elementos* subjacente a este modelo de elementos finitos.

Os testes efectuados ao modelo elastoplástico HMT para a análise de placas (EPT e EPD), implementado no programa *Placa-Leg*, permitiram tirar as seguintes conclusões:

- i) O funcionamento geral do modelo revelou-se eficiente e estável, tanto em análises elásticas como em análises elastoplásticas.
- ii) As funções de Legendre revelaram um bom comportamento numérico e permitiram obter soluções de boa qualidade, mesmo quando os campos aproximados apresentam elevados gradientes. A ortogonalidade é uma propriedade muito importante destas funções, pois permite obter sistemas governativos com elevados níveis de esparsidade, o que conduz a reduzidos tempos de montagem e de resolução. Outro factor muito importante associado à utilização dos polinómios de Legendre está relacionado com o facto de ser possível a determinação de expressões analíticas para os integrais envolvidos na definição dos operadores estruturais.
- iii) O método de Newton-Raphson mostrou-se eficaz na resolução do sistema de equações não lineares. Revelou-se ainda à altura das expectativas criadas à partida, apresentando-se para as situações estudadas estável do ponto de vista numérico e permitindo assegurar a convergência em cada passo de carga com recurso a um número aceitável de iterações.
- iv) Embora não tenha sido efectuada uma comparação directa com o método das Perturbações, muito utilizado noutros modelos HMT, tudo leva a crer que em condições semelhantes o algoritmo que recorre ao método de Newton-Raphson seja mais rápido.

- v) Ao contrário do que se passa com o método das Perturbações, o método de Newton-Raphson torna possível, que num dado passo de carga, seja activado vários modos de cedência. Outra vantagem importante associada à utilização do método de Newton-Raphson está relacionada com o facto de ser possível considerar incrementos de carga maiores. O processo iterativo baseado no método implícito de Euler permite minimizar os erros acumulados na integração das relações constitutivas. Quando comparado com o método das perturbações, a principal desvantagem do algoritmo implementado reside no facto da técnica iterativa adoptada conduzir a um aumento muito significativo do número de resoluções do sistema governativo que se torna necessário efectuar.
- vi) É ainda de salientar que o algoritmo é bastante sensível às tolerâncias consideradas, tanto na definição do zero para a condição de cedência (activação e desactivação de modos de plastificação), quanto na definição do resíduo mínimo a considerar em cada incremento de carga.
- vii) Os critérios de cedência de von Mises e de Drucker-Prager funcionaram de forma estável com o modelo HMT implementado, produzindo os resultados esperados. O critério de Mohr-Coulomb necessita ainda de um estudo mais aprofundado, no que diz respeito não só à definição da função de cedência e das suas derivadas, mas também na correcção dos problemas gerados nas arestas das superfícies de cedência.
- viii) Tanto a técnica de controlo da cedência recorrendo a pontos de colocação, como a que se baseia na definição de células plásticas, funcionaram bem com o modelo implementado no programa *Placa-Leg*. A análise comparativa dos dois métodos permitiu concluir que a técnica de controlo baseada na definição de células plásticas é globalmente mais eficiente que a técnica baseada em pontos de colocação.
- ix) Quando se adopta a técnica de controlo baseada em células plásticas, os resultados obtidos foram fortemente condicionados pelo número de células plásticas e praticamente independentes do número de modos de cedência considerados em cada uma das células. Concluiu-se que o tipo de células mais eficiente é o que recorre a apenas uma função de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos (*CEL 1*).
- x) No que diz respeito à rapidez de cálculo, a técnica baseada em pontos de colocação é inicialmente mais rápida, pois permite dispensar as integrações numéricas. No entanto, à medida que aumenta o número de modos de cedência activos, torna-se necessário definir incrementos de carga cada vez mais pequenos para assegurar a convergência do processo

iterativo. Tal facto conduz a uma perda global de eficácia perante a utilização da técnica baseada na definição de células plásticas.

- xi) Neste trabalho desenvolveu-se e testou-se uma configuração mista, que combina as duas técnicas de controlo atrás referidas. A denominada *Técnica Mista*, permitiu obter resultados de idêntica qualidade, com recurso a um menor número de modos de cedência, sendo portanto aconselhável a sua utilização.
- xii) Nos exemplos efectuados, observou-se que existe um limite a partir do qual o número de graus de liberdade associados às aproximações dos campos de tensões limita o número total de modos activados. Como o estudo deste assunto sai fora do âmbito deste trabalho, não se procurou identificar esse limite.
- xiii) Observou-se que em alguns exemplos efectuados se registou o aparecimento de plastificações *artificiais*. Uma das suas causas está relacionada com as oscilações nos campos de tensões provocadas pela utilização das funções de Legendre e pela mobilização de polinómios de grau elevado, devido aos elevados gradientes em zonas com singularidades. Outro factor que contribuiu para algumas perturbações na evolução da plastificação, corresponde às descontinuidades que aparecem nos campos de tensões nas interfaces entre elementos adjacentes. A técnica de controlo de cedência com base em células plásticas é menos susceptível a este fenómeno, uma vez que efectua uma média ponderada no seu domínio e não um controlo pontual.

6.3 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Em seguida apresentam-se os temas que se consideram mais relevantes e pertinentes para serem desenvolvidos na sequência desta dissertação:

- i) O desenvolvimento de técnicas de detecção e eliminação dos modos espúrios que surgem quando não se respeitam as regras de construção das aproximações. Desta forma, poderá ser possível controlar ou mesmo eliminar os desequilíbrios existentes nas fronteiras inter-elementares, através do aumento do grau utilizado na definição da aproximação do campo de deslocamentos ao longo da fronteira estática. Desta forma, espera-se melhorar a qualidade das soluções finais obtidas, em especial nas análises elastoplásticas que evoluem com informação dada pelo campo de tensões.
- ii) O desenvolvimento e a implementação em modelos HMT de leis constitutivas mais próximas do comportamento real dos materiais estruturais, a maioria das quais necessitará de incorporar leis de escoamento não associadas, definindo em separado funções de potenciais plásticos e funções de cedência.
- iii) O desenvolvimento e implementação em modelo HMT de técnicas de processamento paralelo, tornando-os mais competitivos, tendo em conta que estes modelos apresentam um elevado número de graus de liberdade, o que conduz à necessidade de elevados tempos de processamento e um considerável espaço em memória para armazenar toda a informação gerada pelo modelo numérico.
- iv) Implementação do modelo a problemas tridimensionais.
- v) Possibilidade de se considerar carregamentos estáticos não monotónicos.

Anexo A

Formulação de Elemento de Placa

A.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os elementos de placa são utilizados para modelar situações onde o comportamento estrutural se pode considerar como um estado plano de tensão (EPT) ou como um estado plano de deformação (EPD). Têm especial interesse na fase de desenvolvimento dos modelos, pois a sua formulação é bastante simples.

Este anexo tem como objectivo definir de forma sucinta as variáveis, operadores e relações fundamentais dos elementos de placa. Textos mais aprofundados sobre o assunto podem ser encontrados em [51, 67].

A.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se o elemento de placa representado na Figura A-1, constituído por um material homogéneo e isotrópico, com um domínio (V), delimitado por uma fronteira (Γ), e definido num referencial cartesiano.

A fronteira pode ser dividida na fronteira estática (Γ_σ), onde são conhecidas as tensões aplicadas, e na fronteira cinemática (Γ_u), onde são conhecidos os deslocamentos.

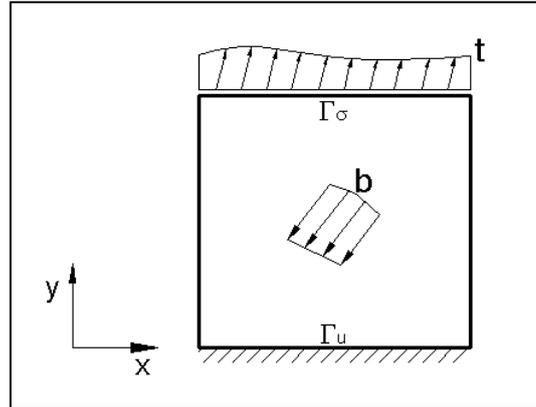


Figura A-1: Elemento de placa.

O elemento de placa encontra-se sujeito a um conjunto de forças de massa e tensões na fronteira. Definem-se os vectores das *forças de massa* (b) e das *tensões na fronteira* (t), através das suas componentes cartesianas:

$$b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Tendo em conta que em problemas de elasticidade plana apenas se consideram tensões no plano da placa ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$), o campo de tensões em qualquer ponto fica definido pelo vector onde se reúnem as seguintes componentes independentes do tensor das tensões:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Analogamente, as componentes do tensor das deformações podem ser agrupadas no vector:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

O campo de deslocamentos do elemento de placa fica definido em cada ponto através das componentes do vector dos *deslocamentos*:

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

A.3 - RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Tratando-se de um problema de elasticidade plana, as equações de equilíbrio definidas em (2.5), reduzem-se a:

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + b_x = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + b_y = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

As relações anteriores podem ser escritas na forma matricial, através de:

$$D\sigma + b = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde o operador diferencial de equilíbrio fica definido por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} & 0 & \frac{\partial()}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Analogamente, as equações de equilíbrio na fronteira estática, definidas em (2.6), reduzem-se a:

$$\begin{cases} n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} = t_x \\ n_y \sigma_{yy} + n_x \sigma_{xy} = t_y \end{cases}, \quad (\text{A.9})$$

ou escrito na forma matricial:

$$N\sigma = t, \quad (\text{A.10})$$

onde (N) representa a matriz que reúne as componentes da normal exterior unitária da fronteira, vindo definida por:

$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

A.4 - RELAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Na hipótese dos pequenos deslocamentos e das pequenas deformações, as relações de compatibilidade definidas em (2.15) para problemas de elasticidade plana, são definidas por:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} = u_{y,y} \\ \gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \end{cases}, \quad (\text{A.12})$$

ou na forma matricial:

$$\varepsilon = D^* u, \quad (\text{A.13})$$

onde o operador diferencial de compatibilidade fica definido por:

$$D^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial()}{\partial y} \\ \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A condição de fronteira cinemática é definida por:

$$u_\gamma = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

onde (u_γ) representa o deslocamento imposto na fronteira cinemática.

A.5 - RELAÇÕES DE ELASTICIDADE

Os campos de deformações relacionam-se com os campos de tensões através das relações constitutivas, que para o caso de materiais elásticos lineares e isotrópicos, correspondem a casos particulares da lei de Hooke.

Para *estados planos de tensão* (EPT), esta lei define-se no formato de flexibilidade por [45, 63]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

ou no formato de rigidez por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

No caso de *estados planos de deformação* (EPD), esta lei define-se no formato de flexibilidade por [38, 45]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

ou no formato de rigidez por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

onde (E) representa o *módulo de elasticidade* e (ν) o *coeficiente de Poisson* do material.

Anexo B

Formulação de Lajes de Reissner-Mindlin

B.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A formulação de Reissner-Mindlin é uma das mais simples formulações de lajes que permite considerar o efeito da deformação por corte.

Este anexo tem como objectivo definir de forma sucinta as variáveis, operadores e relações fundamentais da teoria de Reissner-Mindlin. Textos mais aprofundados sobre o assunto podem ser encontrados em [51, 67].

B.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se o elemento de laje de espessura (t), definido de acordo com o referencial indicado na Figura B-1:

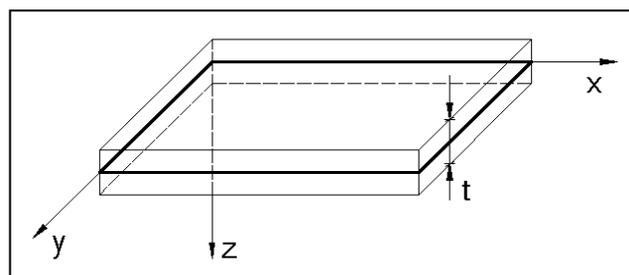


Figura B-1: Elemento de laje e sistema de eixos adoptado.

O elemento de laje encontra-se sujeito às forças de massa aplicadas no seu plano médio, indicadas na Figura B-2:

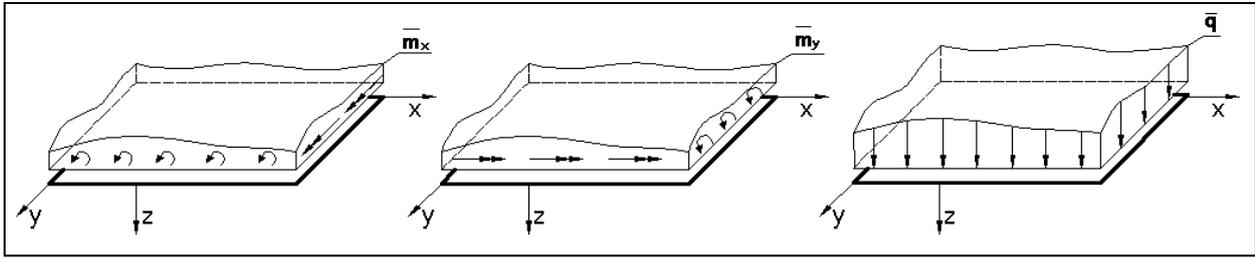


Figura B-2: Forças de massa aplicadas ao elemento de laje.

Define-se o vector das *forças de massa*, por:

$$b = \begin{bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{q} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

As fronteiras do elemento podem encontrar-se sujeitas a forças do tipo indicadas na Figura B-3:

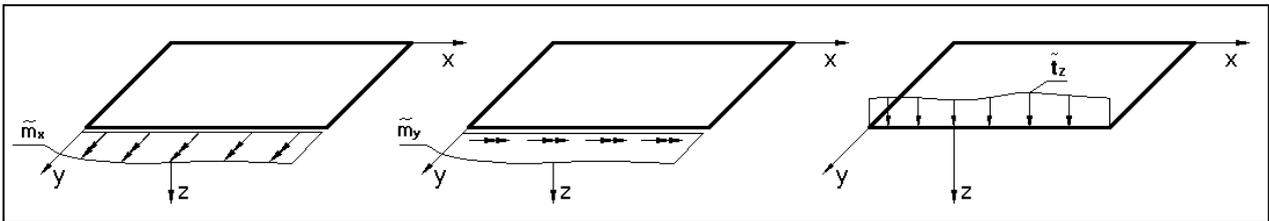


Figura B-3: Forças aplicadas na fronteira do elemento de laje.

Define-se o vector de *forças na fronteira*, por:

$$t = \begin{bmatrix} \tilde{m}_x \\ \tilde{m}_y \\ \tilde{t}_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

A teoria de Reissner-Mindlin considera a hipótese de ser desprezável a tensão (σ_{zz}), para qualquer carregamento aplicado à laje. Salienta-se o facto de esta hipótese ser inconsistente com a teoria da elasticidade tridimensional. No entanto, tal facto não interfere de forma significativa com os resultados obtidos.

Escolhem-se para esforços independentes as grandezas (m_{xx}) , (m_{yy}) , (m_{xy}) , (v_{xz}) e (v_{yz}) , definidas por:

$$m_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z \, dz, \quad m_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z \, dz, \quad m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z \, dz. \quad (\text{B.3})$$

$$v_{xz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} \, dz, \quad v_{yz} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} \, dz. \quad (\text{B.4})$$

Pode então introduzir-se o vector dos esforços:

$$s = \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ v_{xz} \\ v_{yz} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

B.3 - RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Com o objectivo de escrever as equações de equilíbrio no domínio (2.5) em função dos esforços considerados (s), efectua-se as seguintes manipulações algébricas

1. Integra-se na espessura a equação (2.5) definida com (i=3), e aplica-se a regra de Leibnitz (1.4), resultando:

$$\left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} \, dz \right)_{,x} + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zy} \, dz \right)_{,y} + q = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$v_{x,x} + v_{y,y} + \bar{q} = 0. \quad (\text{B.7})$$

2. Integra-se na espessura a equação (2.5) definida com (i=1), multiplica-se por (z), efectua-se uma integração por partes (1.3) e aplica-se a regra de Leibnitz (1.4):

$$\left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} \cdot z \, dz \right)_{,x} + \left(\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yx} \cdot z \, dz \right)_{,y} - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} \, dz = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$m_{xx,x} + m_{yx,y} - v_{xz} + \bar{m}_x = 0. \quad (\text{B.9})$$

3. Analogamente para a direcção (i=2), obtém-se:

$$m_{xy,x} + m_{yy,y} - v_{yz} + \bar{m}_y = 0. \quad (\text{B.10})$$

Juntando (B.7), (B.9) e (B.10), obtem-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ v_{xy} \\ v_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

A condição de equilíbrio na fronteira estática (2.8), no caso da formulação de laje de Reissner-Mindlin, fica definida por:

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ v_{xz} \\ v_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_x \\ \tilde{m}_y \\ \tilde{t}_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

B.4 - RELAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Considerando os modos de deformação representados na Figura B-4, os deslocamentos da laje podem ser definidos recorrendo a:

$$\begin{cases} u_x(x,y,z) = \theta_x(x,y) \cdot z \\ u_y(x,y,z) = \theta_y(x,y) \cdot z \\ u_z(x,y,z) = w(x,y) \end{cases}, \quad (\text{B.13})$$

Nesta definição, o campo de deslocamentos pode ser definido recorrendo apenas a três componentes (θ_x, θ_y, w) , as quais definem o vector dos deslocamentos:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

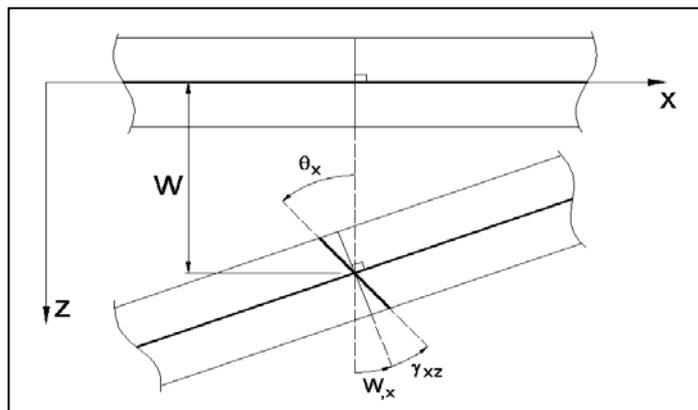


Figura B-4: Deformação por flexão e por corte da laje.

A teoria de Reissner-Mindlin considera que as fibras normais ao plano médio da laje ($z=0$) permanecem rectas depois da laje se deformar, mas não necessariamente ortogonais a esse plano. Assim sendo, o campo de rotações (θ_i), pode ser definido como a soma de duas parcelas:

$$\theta_i = -w_{,i} + \gamma_{iz} \quad , \text{com } i = (x,y) \quad , \quad (B.15)$$

onde (γ_{iz}) representa a distorção de fibras originalmente perpendiculares, conforme indicado na Figura B-4, para o caso ($i=x$).

Introduzindo as relações de compatibilidade definidas em (2.15), considerando a hipótese da linearidade geométrica e recorrendo à definição de distorção ($\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$), obtém-se o vector das deformações independentes:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \cdot z \\ \theta_{y,y} \cdot z \\ 0 \\ z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ \theta_x + w_{,x} \\ \theta_y + w_{,y} \end{bmatrix} \quad . \quad (B.16)$$

Introduzindo o tensor das curvaturas, cujas componentes independentes se podem calcular através de:

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad , i = j = x,y \quad , \quad (B.17)$$

obtém-se o seguinte formato para as equações de compatibilidade no domínio:

$$\begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 1 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 1 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix} \quad , \quad (B.18)$$

A condição de fronteira cinemática é definida por:

$$u_\gamma = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix} \quad , \quad (B.19)$$

onde (u_γ) representa o deslocamento imposto na fronteira cinemática.

B.5 - RELAÇÕES DE ELASTICIDADE

As expressões que relacionam as tensões e as deformações para materiais elásticos lineares são obtidas directamente da teoria da elasticidade [4]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Tratando a equação anterior tendo em conta a definição de esforços e deformações independentes, obtêm-se as relações de elasticidade para a teoria de Reissner-Mindlin, escritas no formato de rigidez:

$$\sigma = k\varepsilon \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ v_{xz} \\ v_{yz} \end{bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \frac{6(1-\nu)}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \frac{6(1-\nu)}{t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

onde (D_f) se denomina por rigidez de flexão da laje sendo definido por:

$$D_f = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (\text{B.22})$$

No formato de flexibilidade obtêm-se:

$$\varepsilon = f\sigma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)t^2}{6\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)t^2}{6\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ v_{xz} \\ v_{yz} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

onde (E) representa o *módulo de elasticidade*, (ν) o *coeficiente de Poisson*, e (α) o *factor de corte*. Este último parâmetro é utilizado para corrigir o efeito da distribuição de tensões tangenciais não ser uniforme ao longo da espessura da laje. Usualmente toma o valor de $(\frac{5}{6})$.

Anexo C

Transformações de Coordenadas

C.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este anexo tem como objectivo definir as expressões envolvidas na transformação de coordenadas, de um elemento genérico trapezoidal definido no referencial global (x_1, x_2) , para um elemento mestre definido no referencial local (ξ, η) .

São apresentadas simultaneamente as expressões para elementos mestres definidos nos intervalos $([0, 1])$ e $([-1, 1])$, pois foram ambos utilizados neste trabalho.

C.2 - DEFINIÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Considere-se um elemento trapezoidal de 4 nós, definido no sistema de eixos globais (x_1, x_2) . Pretende-se efectuar uma transformação de coordenadas de um elemento mestre definido no sistema de eixos (ξ, η) , conforme indicado na figura C-1.

Para a definição da geometria do elemento, considera-se uma aproximação do tipo bilinear (figura C-2), definida para o elemento mestre $([0, 1])$ por:

$$\begin{cases} \psi_1 = (1 - \xi)(1 - \eta) \\ \psi_2 = \xi(1 - \eta) \\ \psi_3 = \xi\eta \\ \psi_4 = (1 - \xi)\eta \end{cases}, \tag{C.1}$$

e para o elemento mestre $([-1,1])$ por:

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \psi_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \psi_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \psi_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases}. \tag{C.2}$$

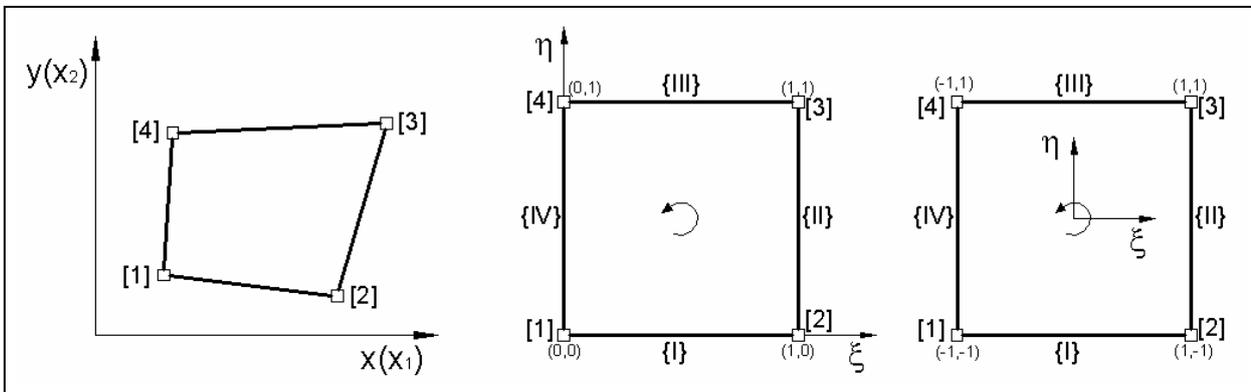


Figura C-1: Transformação para coordenadas de um elemento genérico trapezoidal de 4 nós.

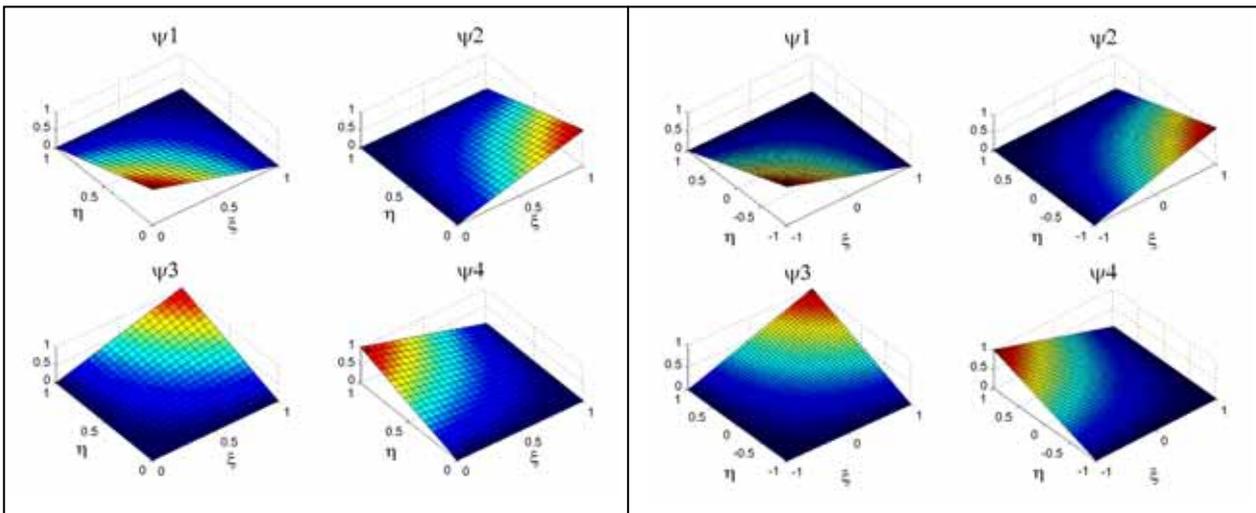


Figura C-2: Funções de aproximação da geometria do elemento.

A geometria do elemento nos eixos globais (x_1, x_2) , pode ser definida na forma:

$$x_k = \psi_1 x_k^{[1]} + \psi_2 x_k^{[2]} + \psi_3 x_k^{[3]} + \psi_4 x_k^{[4]}, \quad \text{para } k = \{1, 2\}, \quad (\text{C.3})$$

onde $(x_k^{[i]})$ representa a coordenada (k) definida no sistema de eixos globais, do nó (i) do elemento.

Salienta-se que, devido à forma como foi definida a aproximação da geometria do elemento, a orientação dos lados locais é necessariamente definida no sentido anti-horário.

Introduzindo as aproximações (C.1), na expressão (C.3), obtém-se no caso do elemento mestre $([0, 1])$:

$$x_k(\xi, \eta) = x_k^{[1]} + (-x_k^{[1]} + x_k^{[2]})\xi + (-x_k^{[1]} + x_k^{[4]})\eta + (x_k^{[1]} - x_k^{[2]} + x_k^{[3]} - x_k^{[4]})\xi\eta. \quad (\text{C.4})$$

As equações anteriores podem ser escritas no formato:

$$x_k(\xi, \eta) = x_{0k} + \alpha_k \eta + \beta_k \xi + \gamma_k \xi \eta, \quad \text{para } k = \{1, 2\}, \quad (\text{C.5})$$

onde para o elemento mestre $([0, 1])$ se pode escrever:

$$\begin{cases} x_{0k} = x_k^{[1]} \\ \alpha_k = x_k^{[4]} - x_k^{[1]} \\ \beta_k = x_k^{[2]} - x_k^{[1]} \\ \gamma_k = x_k^{[1]} - x_k^{[2]} + x_k^{[3]} - x_k^{[4]} \end{cases}. \quad (\text{C.6})$$

Desenvolvendo um raciocínio em tudo semelhante para o elemento mestre $([-1, 1])$, obter-se-ia a expressão geral (C.5), mas com os coeficientes definidos por:

$$\begin{cases} x_{0k} = \frac{1}{4}(x_k^{[1]} + x_k^{[2]} + x_k^{[3]} + x_k^{[4]}) \\ \alpha_k = \frac{1}{4}(-x_k^{[1]} - x_k^{[2]} + x_k^{[3]} + x_k^{[4]}) \\ \beta_k = \frac{1}{4}(-x_k^{[1]} + x_k^{[2]} + x_k^{[3]} - x_k^{[4]}) \\ \gamma_k = \frac{1}{4}(x_k^{[1]} - x_k^{[2]} + x_k^{[3]} - x_k^{[4]}) \end{cases}. \quad (\text{C.7})$$

C.3 - DEFINIÇÃO DO JACOBIANO DA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A relação entre variações infinitesimais das variáveis definidas nos sistemas de coordenadas global e local, pode ser obtido através da seguinte igualdade:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_i}{\partial \eta} d\eta, \quad i = \{1,2\}, \quad (\text{C.8})$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

A matriz da equação anterior é usualmente denominada por *matriz Jacobiana* da transformação de coordenadas. Para os elementos trapezoidais utilizados, é definida por:

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \beta_1 + \gamma_1 \eta & \alpha_1 + \gamma_1 \xi \\ \beta_2 + \gamma_2 \eta & \alpha_2 + \gamma_2 \xi \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Define-se o *Jacobiano* da transformação como o determinante da matriz Jacobiana, o qual pode ser obtido através de:

$$|J(\xi, \eta)| = \det[J(\xi, \eta)] = (\beta_1 + \gamma_1 \eta)(\alpha_2 + \gamma_2 \xi) - (\alpha_1 + \gamma_1 \xi)(\beta_2 + \gamma_2 \eta). \quad (\text{C.11})$$

Efectuando o desenvolvimento dos produtos e agrupando os termos, obtém-se:

$$|J(\xi, \eta)| = (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2) + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) \eta + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \xi + (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2) \xi \eta. \quad (\text{C.12})$$

Observando que o último termo se anula, é possível escrever a expressão anterior na forma condensada [43]:

$$|J(\xi, \eta)| = J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta, \quad (\text{C.13})$$

onde:

$$J_0 = \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 \quad (\text{C.14})$$

$$J_\eta = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2 \quad (\text{C.15})$$

$$J_\xi = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \quad (\text{C.16})$$

C.4 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS INVERSA

A definição da transformação de coordenadas inversa, do referencial global para o referencial local, não pode ser feita directamente pois as expressões (C.5) não podem ser definidas explicitamente em função das variáveis locais. Um forma muito simples de contornar este problema consiste em utilizar recursivamente as expressões (C.5), para que se obtenha as

coordenadas locais (ξ, η) associadas às coordenadas globais $(x_1, x_2)_{obj}$ pretendidas. Este procedimento pode ser esquematizado em:

1. Estimativa das coordenadas locais: $(\xi, \eta)_0$.
2. Cálculo das coordenadas globais $(x_1, x_2)_j$ correspondentes a $(\xi, \eta)_{j-1}$, através de (C.5).
3. Cálculo do erro, $\{e_1, e_2\}_j = \{x_1, x_2\}_j - \{x_1, x_2\}_{obj}$.
4. Caso o erro não seja suficientemente pequeno:
 - 4.1 - Tentativa de eliminação do erro: $[D]\{\Delta_1, \Delta_2\} = -\{e_1, e_2\}$.
 - 4.2 - Actualização das coordenadas locais: $(\xi, \eta)_{j+1} = (\xi, \eta)_j + (\Delta_1, \Delta_2)$.
 - 4.3 - Voltar ao passo 2.

Caso a matriz $[D]$ esteja associada às primeiras derivadas das expressões (C.5), o procedimento anterior conduz à aplicação do método de Newton-Raphson e a matriz $[D]$ encontra-se definida em (C.10).

Anexo D

Polinómios de Legendre

D.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As *funções de Legendre de ordem (n)*, correspondem às soluções da equação diferencial de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \quad (\text{D.1})$$

Somos conduzidos a funções do tipo polinomial, que podem ser geradas pela *fórmula de Rodrigues* [57]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (\text{D.2})$$

onde $P_n(x)$ representa o polinómio de Legendre de ordem n .

D.2 - PROPRIEDADES DOS POLINÓMIOS DE LEGENDRE

Verifica-se que polinómios de grau consecutivo são alternadamente funções pares e ímpares.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (\text{D.3})$$

Os integrais definidos no intervalo $([-1,1])$ do produto de dois polinómios de Legendre, podem ser calculados a partir das igualdades:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, \text{ para } m \neq n \\ \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}, \text{ para } m = n \end{cases} \quad (D.4)$$

Assim sendo, conclui-se que os polinómios de Legendre são ortogonais no intervalo $([-1,1])$.

D.3 - FÓRMULAS GERADORAS DE POLINÓMIOS DE LEGENDRE

Várias fórmulas podem ser utilizadas para gerar os polinómios de Legendre, sendo a maioria fórmulas de recorrência [57]:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad (D.5)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad (D.6)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad (D.7)$$

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (D.8)$$

D.3.1 - FÓRMULA RECURSIVA DE BONNET

Neste trabalho utilizou-se a *fórmula recursiva de Bonnet*:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (D.9)$$

com $(P_0(x) = 1)$ e $(P_1(x) = x)$.

Por forma a que se verifique a condição (D.10), a fórmula de Bonnet é escalada por (λ_n) (D.11), obtendo-se o formato alternativo apresentado em (D.12) [8]:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = 1, \quad (D.10)$$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad (D.11)$$

$$\frac{n+1}{\lambda_{n+1}} P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{\lambda_n} x P_n(x) - \frac{n}{\lambda_{n-1}} P_{n-1}(x), \quad (D.12)$$

com $(P_0(x) = \lambda_0)$ e $(P_1(x) = \lambda_1 x)$:

Na Figura D-1 apresenta-se a representação gráfica dos polinómios de Legendre de grau igual ou inferior a 14, gerados através da expressão (D.12).

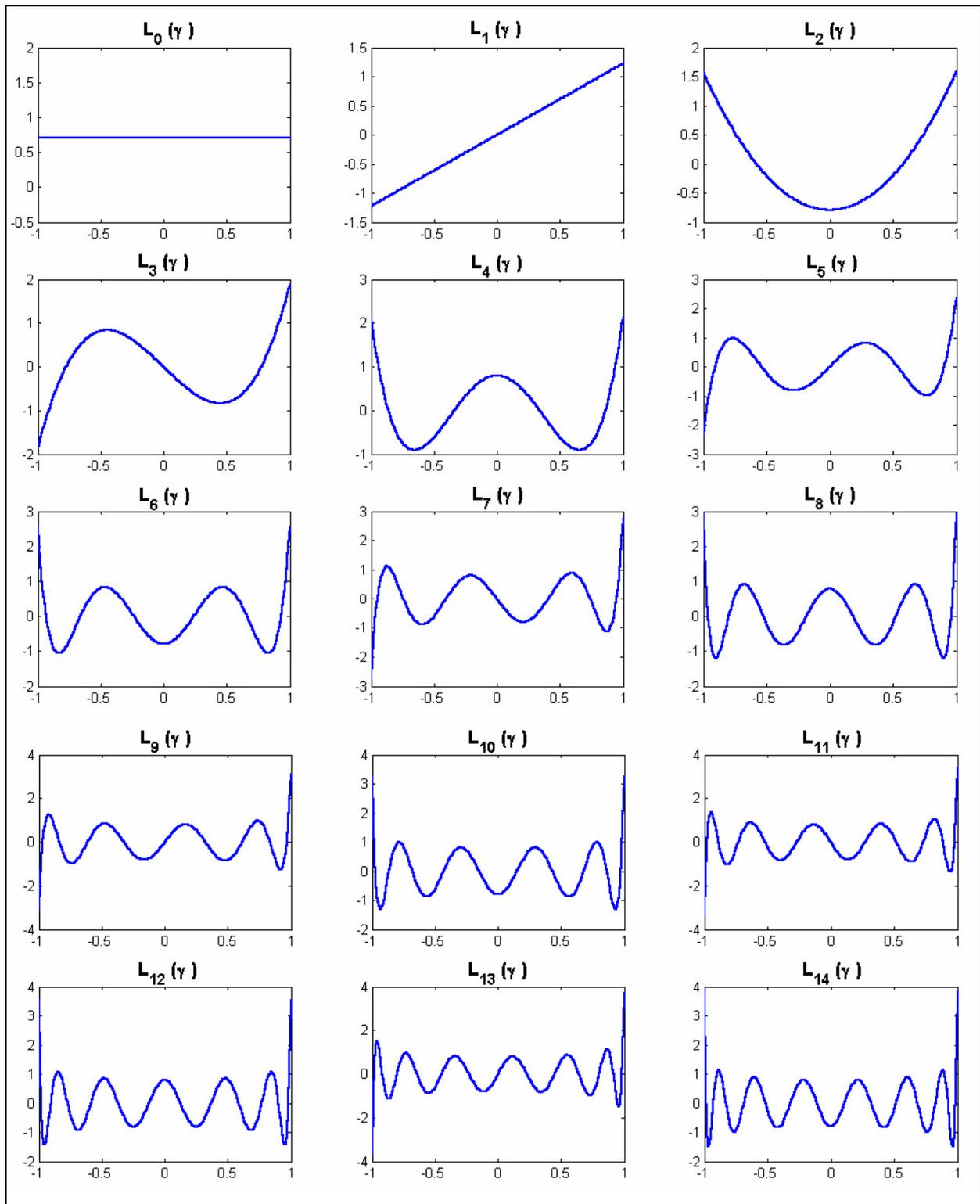


Figura D-1: Representação gráfica dos polinómios de Legendre unidimensionais.

Na Figura D-2 e na Figura D-3, apresenta-se a representação gráfica dos polinómios de Legendre bidimensionais até ao terceiro grau.

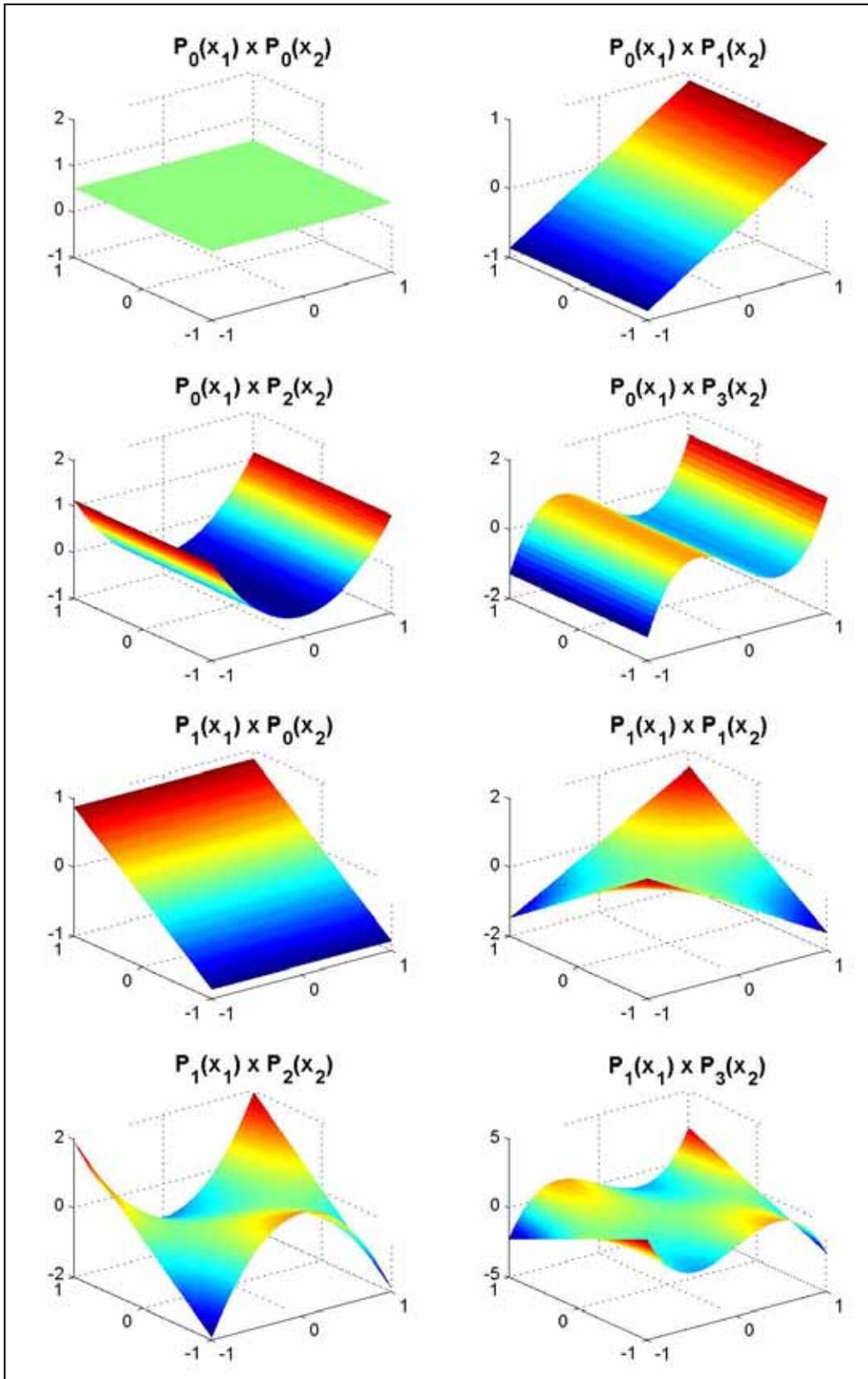


Figura D-2: Representação gráfica dos polinómios de Legendre bidimensionais.

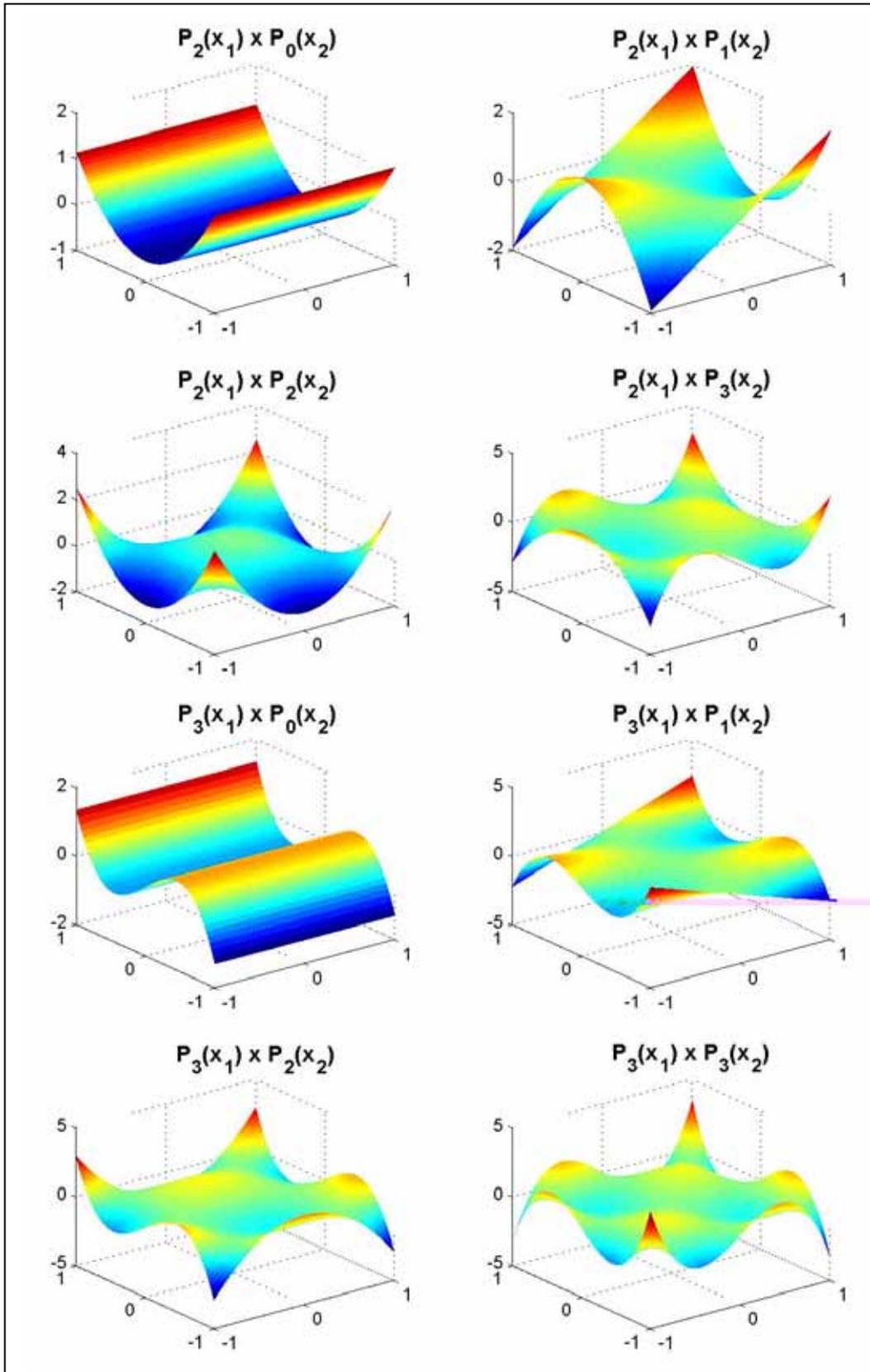


Figura D-3: Representação gráfica dos polinômios de Legendre bidimensionais (cont.).

D.4 - EXPRESSÕES DAS INTEGRAÇÕES ANALÍTICAS

Uma das principais vantagens associadas à utilização destes polinómios consiste em ser possível dispensar os processos numéricos no cálculo das integrações, pois é sempre possível determinar expressões analíticas, mesmo para os casos em que não se verifica a propriedade da ortogonalidade.

Apresentam-se de seguida as expressões indicadas por Pereira *et al.* [43].

$$A_{ij}^0 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = 1 & , \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad (D.13)$$

$$A_{ij}^1 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x dx = \frac{i}{2\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j + 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x dx = \frac{j}{2\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j - 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x dx = 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad (D.14)$$

$$A_{ij}^2 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^2 dx = \frac{4i^3 + 6i^2 - 1}{2(2i-1)(2i+3)\lambda_i^2} & , \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^2 dx = \frac{j(j-1)}{2(2j-1)\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j - 2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^2 dx = \frac{i(i-1)}{2(2i-1)\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j + 2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^2 dx = 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad (D.15)$$

$$A_{ij}^3 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^3 dx = \frac{j(j-1)(j-2)}{2(2j-1)(2j-3)\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j - 3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^3 dx = \frac{3j(j^2 - 2)}{2(4j^2 - 9)\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j - 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^3 dx = \frac{3i(i^2 - 2)}{2(4i^2 - 9)\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j + 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^3 dx = \frac{i(i-1)(i-2)}{2(2i-1)(2i-3)\lambda_i \lambda_j} & , \text{se } i = j + 3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) x^3 dx = 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad (D.16)$$

$$B_{ij}^0 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} dx = 2\lambda_i \lambda_j, & \text{se } i < j \wedge i + j \text{ é ímpar} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} dx = 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

$$B_{ij}^1 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x dx = i, & \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x dx = 2\lambda_i \lambda_j, & \text{se } i < j \wedge i + j \text{ é par} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x dx = 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

$$B_{ij}^2 = \begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 dx = \frac{i(i-1)}{2\lambda_i \lambda_j}, & \text{se } i = j + 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 dx = \frac{3j^2 - j - 1}{2\lambda_i \lambda_j}, & \text{se } i = j - 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 dx = 2\lambda_i \lambda_j, & \text{se } i < j - 1 \wedge i + j \text{ é ímpar} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 dx = 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

Anexo E

Crêterios de Cedência

E.1 - CONSIDERA OES INICIAIS

Este anexo tem como objectivo definir as expressões relacionadas com as condi es de cedência implementadas. Para além da defini o da própria condi o de cedência,   necessário definir as suas derivadas, pois são necessárias ao cálculo dos operadores:

$$N_* = \int S_v^t \frac{\partial \phi_*}{\partial \sigma} P_* dV ,$$
$$M_* = \int S_v^t \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} S_v \Delta e_* dV .$$

Para o critério de cedência de Mohr-Coulomb não se apresentam as segundas derivadas $\left(\frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} \right)$, o que se deve essencialmente a três razões: em primeiro lugar,   de salientar que as expressões resultantes apresentam grandes dimensões e defini o matemática complexa. Considerou-se também dispensável a sua inclusão neste texto, pois conforme já foi referido, a implementa o do operador (M_*) não   conveniente para a eficiência numérica do modelo HMT. Outro factor importante diz respeito   existência do critério de Drucker-Prager que constitui uma boa aproxima o do anterior, permitindo ainda evitar os problemas numéricos existentes na defini o das derivadas nas arestas.

Recordam-se as seguintes definições, úteis para expressar matematicamente os critérios de cedência:

Vector das componentes independentes do tensor das tensões:

$$\sigma^t = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}]. \quad (\text{E.1})$$

Primeiro invariante do tensor das tensões:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (\text{E.2})$$

Tensões normal e tangencial médias:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{3} = \frac{I_1}{3}, \quad (\text{E.3})$$

$$\tau_m = \sqrt{\frac{2}{5} J_2}. \quad (\text{E.4})$$

Tensões normal e tangencial octaédricas:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}, \quad (\text{E.5})$$

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}. \quad (\text{E.6})$$

Tensor das tensões deviatóricas, e o seu segundo e terceiro invariante:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk} \delta_{ij}}{3}, \quad (\text{E.7})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yx}^2 + \sigma_{zx}^2, \quad (\text{E.8})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \det s_{ij}. \quad (\text{E.9})$$

A magnitude da componente hidrostática e deviatórica:

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \sigma_{\text{oct}} = \sqrt{3} \sigma_m, \quad (\text{E.10})$$

$$\rho = \sqrt{2 J_2} = \sqrt{3} \tau_{\text{oct}} = \sqrt{5} \tau_m. \quad (\text{E.11})$$

O ângulo de *Lode* [32]:

$$\text{sen}(3\theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}, \quad \text{com } \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \quad (\text{E.12})$$

É possível definir a seguinte expressão para o cálculo das tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, com base nos três valores de (θ) contidos no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin(\theta) \\ \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}, \quad \text{com } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (\text{E.13})$$

Um estado de tensão é definido, na sua forma mais simples, através de um ponto (P) pertencente ao espaço das tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Para materiais com comportamento isotrópico, pode ser igualmente definido através da sua componente no eixo hidrostático $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$, por $\left(\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sigma_{\text{oct}} = \sqrt{3}\sigma_m\right)$, pela sua componente no plano das tensões deviatóricas, perpendicular a esse eixo, obtida de $(\rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3}\tau_{\text{oct}} = \sqrt{5}\tau_m)$, e ainda, através do ângulo de Lode (θ) , medido a partir da direcção positiva do eixo da maior tensão principal (σ_1) , (Figura E-1).

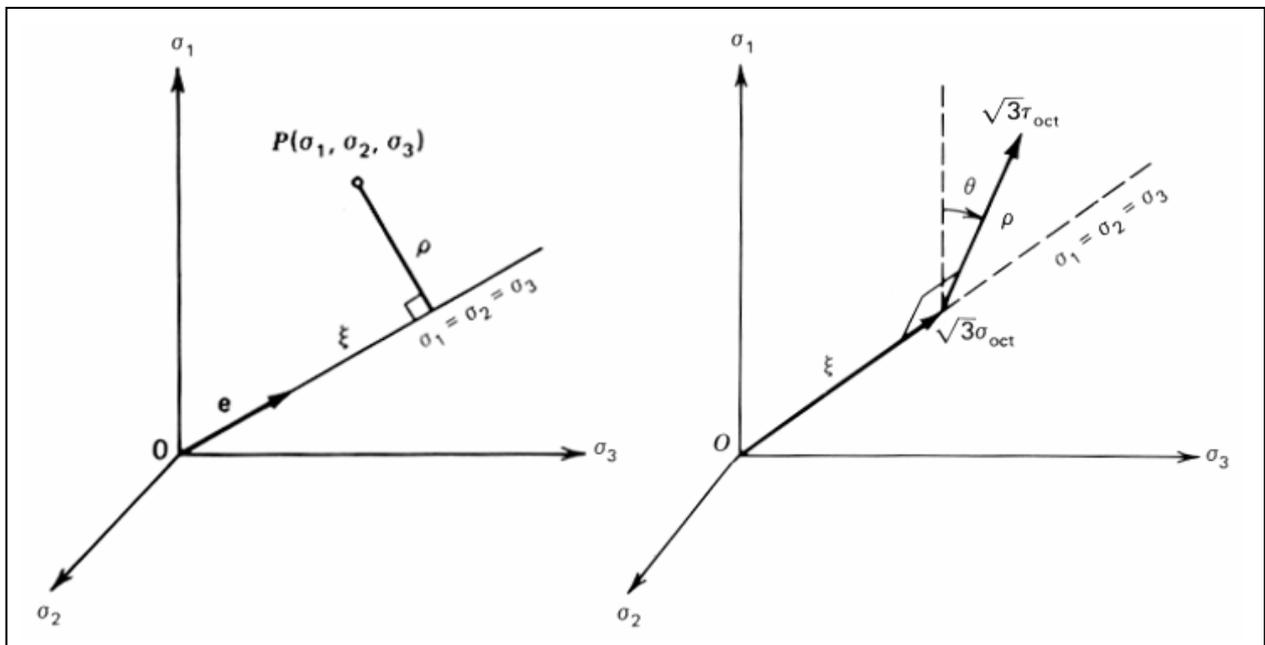


Figura E-1: Significado físico e geométrico de (ξ, ρ, θ) e $(\sigma_{\text{oct}}, \tau_{\text{oct}}, \theta)$, adaptado de [12].

Assim sendo, a definição de um estado de tensão pode ser inequivocamente definido, recorrendo a qualquer uma das formas: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, (I_1, J_2, J_3) , $(\sigma_{\text{oct}}, \tau_{\text{oct}}, \theta)$ e (ξ, ρ, θ) .

E.2 - CRITÉRIO DE VON MISES

Define-se para o critério de von Mises [67]:

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} \\ \frac{c}{3} \\ 2\sigma_{xy} \\ 2\sigma_{yz} \\ 2\sigma_{xz} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - A^2 & -\frac{1}{6} - AB & -\frac{1}{6} - AC & -\frac{\sigma_{xy} A}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{yz} A}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{xz} A}{\sqrt{J_2}} \\ & \frac{1}{3} - B^2 & -\frac{1}{6} - BC & -\frac{\sigma_{xy} B}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{yz} B}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{xz} B}{\sqrt{J_2}} \\ & & \frac{1}{3} - C^2 & -\frac{\sigma_{xy} C}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{yz} C}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{xz} C}{\sqrt{J_2}} \\ & & & 1 - \frac{\sigma_{xy}^2}{J_2} & -\frac{\sigma_{xy} \sigma_{yz}}{J_2} & -\frac{\sigma_{xy} \sigma_{xz}}{J_2} \\ & \text{Sim.} & & & 1 - \frac{\sigma_{yz}^2}{J_2} & -\frac{\sigma_{yz} \sigma_{xz}}{J_2} \\ & & & & & 1 - \frac{\sigma_{xz}^2}{J_2} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.15})$$

onde:

$$A = \frac{a}{6\sqrt{J_2}}, \quad B = \frac{b}{6\sqrt{J_2}}, \quad C = \frac{c}{6\sqrt{J_2}}, \quad (\text{E.16})$$

$$a = 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \quad b = -\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \quad c = -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{zz}. \quad (\text{E.17})$$

E.3 - CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB

Define-se para o critério de Mohr-Coulomb [35, 36, 67]:

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{c_1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{c_2}{2\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\sigma_{xy} \\ 2\sigma_{yz} \\ 2\sigma_{xz} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} s_y s_z - \sigma_{yz}^2 \\ s_x s_z - \sigma_{xz}^2 \\ s_x s_y - \sigma_{xy}^2 \\ 2(\sigma_{yz} \sigma_{xz} - s_z \sigma_{xy}) \\ 2(\sigma_{xz} \sigma_{xy} - s_x \sigma_{yz}) \\ 2(\sigma_{xy} \sigma_{yz} - s_y \sigma_{xz}) \end{bmatrix} + c_3 \frac{J_2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.18})$$

onde:

$$c_1 = \text{sen}(\phi), \quad (\text{E.19})$$

$$c_2 = \cos(\theta) \left[(1 + \text{tg}(\theta) \text{tg}(3\theta)) + \frac{\text{sen}(\phi)}{\sqrt{3}} (\text{tg}(3\theta) - \text{tg}(\theta)) \right], \quad (\text{E.20})$$

$$c_3 = \frac{(\sqrt{3} \text{sen}(\theta) + \cos(\theta) \text{sen}(\phi))}{2J_2 \cos(3\theta)}, \quad (\text{E.21})$$

$$S_x = \sigma_{xx} - \sigma_m, \quad S_y = \sigma_{yy} - \sigma_m, \quad S_z = \sigma_{zz} - \sigma_m. \quad (\text{E.22})$$

E.4 - CRITÉRIO DE DRUCKER-PRAGER

Define-se para o critério de Drucker-Prager [8]:

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial \sigma} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} \\ \frac{c}{3} \\ 2\sigma_{xy} \\ 2\sigma_{yz} \\ 2\sigma_{xz} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.23})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - A^2 & -\frac{1}{6} - AB & -\frac{1}{6} - AC & -\frac{\sigma_{xy} A}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{yz} A}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{xz} A}{\sqrt{J_2}} \\ & \frac{1}{3} - B^2 & -\frac{1}{6} - BC & -\frac{\sigma_{xy} B}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{yz} B}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{xz} B}{\sqrt{J_2}} \\ & & \frac{1}{3} - C^2 & -\frac{\sigma_{xy} C}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{yz} C}{\sqrt{J_2}} & -\frac{\sigma_{xz} C}{\sqrt{J_2}} \\ & & & 1 - \frac{\sigma_{xy}^2}{J_2} & -\frac{\sigma_{xy} \sigma_{yz}}{J_2} & -\frac{\sigma_{xy} \sigma_{xz}}{J_2} \\ & & & & 1 - \frac{\sigma_{yz}^2}{J_2} & -\frac{\sigma_{yz} \sigma_{xz}}{J_2} \\ & & & & & 1 - \frac{\sigma_{xz}^2}{J_2} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.24})$$

Sim.

onde:

$$A = \frac{a}{6\sqrt{J_2}}, \quad B = \frac{b}{6\sqrt{J_2}}, \quad C = \frac{c}{6\sqrt{J_2}}, \quad (\text{E.25})$$

$$a = 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \quad b = -\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \quad c = -\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{zz}. \quad (\text{E.26})$$

Anexo F

Aproximação dos Incrementos dos Parâmetros Plásticos

F.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este anexo tem como objectivo apresentar as funções utilizadas na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos.

F.2 - APROXIMAÇÃO CONSTANTE

A aproximação constante é definida por uma única função, com valor unitário em todo o seu domínio de definição. Matematicamente é definida por:

$$P_*(\gamma, \psi) = 1. \quad (\text{F.1})$$

F.3 - APROXIMAÇÃO LINEAR

A aproximação linear é definida pelas quatro funções (F.2), sempre não negativas. Cada função toma o valor unitário num dos cantos da célula plástica (Figura F-1):

$$\left\{ \begin{array}{l} P_*^1(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1-\gamma)(1-\psi) \\ P_*^2(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1+\gamma)(1-\psi) \\ P_*^3(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1+\gamma)(1+\psi) \\ P_*^4(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1-\gamma)(1+\psi) \end{array} \right. \quad (F.2)$$

F.4 - APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA

A aproximação quadrática é definida por nove funções (F.3), sempre não negativas. Cada função toma valor unitário num dos cantos ou a meio dos lados das células plásticas (Figura F-2):

$$\left\{ \begin{array}{l} P_*^1(\gamma, \psi) = \frac{1}{16}(\gamma-1)^2(\psi-1)^2 \\ P_*^2(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1-\gamma^2)(1-\psi)^2 \\ P_*^3(\gamma, \psi) = \frac{1}{16}(1+\gamma)^2(1-\psi)^2 \\ P_*^4(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1-\gamma)^2(1-\psi^2) \\ P_*^5(\gamma, \psi) = (1-\gamma^2)(1-\psi^2) \\ P_*^6(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(\gamma+1)^2 + (1-\psi^2) \\ P_*^7(\gamma, \psi) = \frac{1}{16}(\gamma-1)^2(\psi+1)^2 \\ P_*^8(\gamma, \psi) = \frac{1}{4}(1-\gamma^2)(\psi+1)^2 \\ P_*^9(\gamma, \psi) = \frac{1}{16}(\gamma+1)^2(\psi+1)^2 \end{array} \right. \quad (F.3)$$

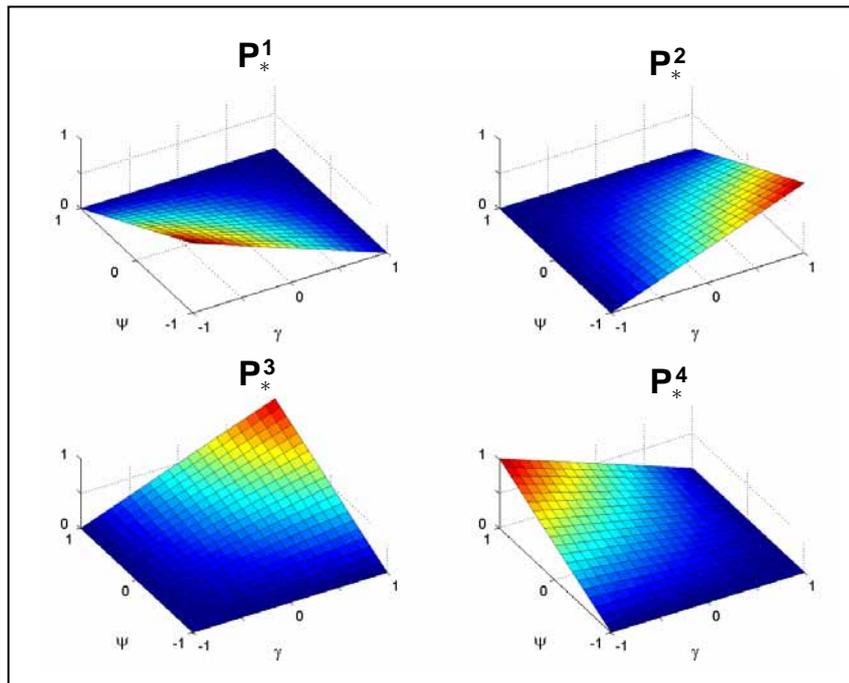


Figura F-1: Funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos Aproximação Linear.

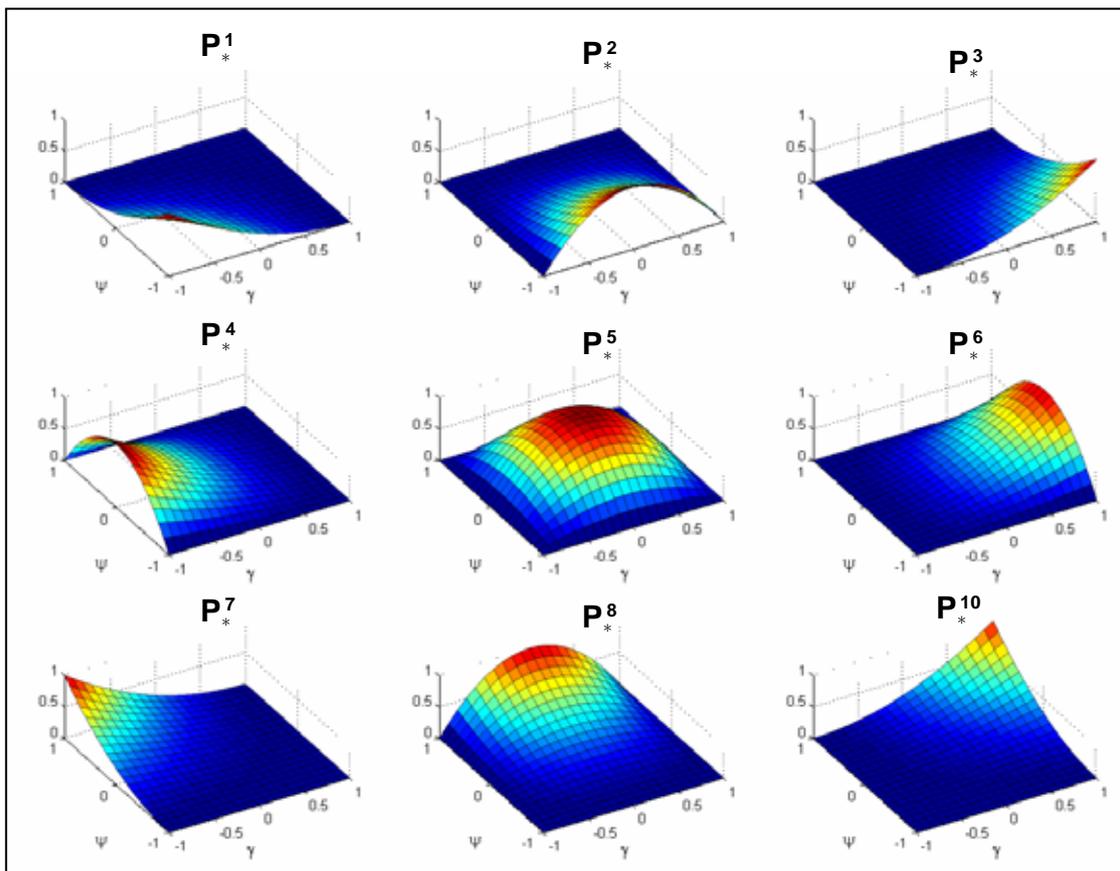


Figura F-2: Funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos Aproximação Quadrática.

Anexo G

Programa *Laje-Pol*

G.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este anexo tem como objectivo principal, apresentar as expressões utilizadas no cálculo dos operadores estruturais do programa denominado *Laje-Pol*.

Os elementos utilizados são do tipo trapezoidal com a geometria definida por 4 nós. São utilizadas funções de aproximação do tipo polinomial, em que a função de grau (i) é definida por:

$$P_i(\gamma) = \gamma^i. \quad (\text{G.1})$$

A aproximação das grandezas estruturais é definida pelas variáveis $(g_{sm}, g_{sv}, g_{ut}, g_{uw}, g_{uft}, g_{ufw})$, que representam respectivamente o grau máximo da aproximação dos campos de momentos, esforço transversal, rotações relativas no domínio, deslocamentos transversais no domínio, rotações e deslocamentos transversais na fronteira estática.

G.2 - CÁLCULO DOS OPERADORES ESTRUTURAIS

G.2.1 - OPERADOR DE FLEXIBILIDADE (F)

Particularizando a expressão (4.16) para elementos trapezoidais, cujo Jacobiano da transformação de coordenadas é definido em (4.3), um elemento genérico do operador de flexibilidade pode ser calculado por:

$$F(i,j,k,l,m,n) = \int_0^1 \int_0^1 P_i(\xi) P_j(\eta) f_{kl} P_m(\xi) P_n(\eta) (J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta) d\eta d\xi, \quad (G.2)$$

A expressão anterior pode ser dividida nas três parcelas relacionadas com os termos que definem o Jacobiano. Efectuando as integrações, obtém-se:

$$J_0 \int_0^1 \int_0^1 P_i(\xi) P_j(\eta) f_{kl} P_m(\xi) P_n(\eta) d\eta d\xi = \frac{f_{kl} J_0}{(i+m+1)(j+n+1)}, \quad (G.3)$$

$$J_\xi \int_0^1 \int_0^1 P_i(\xi) P_j(\eta) f_{kl} P_m(\xi) P_n(\eta) \xi d\eta d\xi = \frac{f_{kl} J_\xi}{(i+m+2)(j+n+1)}, \quad (G.4)$$

$$J_\eta \int_0^1 \int_0^1 P_i(\xi) P_j(\eta) f_{kl} P_m(\xi) P_n(\eta) \eta d\eta d\xi = \frac{f_{kl} J_\eta}{(i+m+1)(j+n+2)}. \quad (G.5)$$

O termo genérico do operador pode ser obtido da soma dos termos anteriores:

$$F(i,j,k,l,m,n) = f_{kl} \left[\frac{J_0}{(i+m+1)(j+n+1)} + \frac{J_\xi}{(i+m+2)(j+n+1)} + \frac{J_\eta}{(i+m+1)(j+n+2)} \right]. \quad (G.6)$$

Para cada termo não nulo de (f_{kl}) gera-se um bloco de termos quadrado, com dimensão $(1+g_{sm})^2$ ou $(1+g_{sv})^2$, conforme (f_{kl}) esteja associado a um momento ou a um esforço transversal.

O operador de flexibilidade (F) é traduzido por uma matriz quadrada com a dimensão:

$$\sum_{i=1}^{n^\circ \text{elem}} [3(1+g_{sm}^i)^2 + 2(1+g_{sv}^i)^2]. \quad (G.7)$$

G.2.2 - OPERADOR DE COMPATIBILIDADE NO DOMÍNIO (A_v)

De acordo com a expressão (4.27), um termo genérico do operador de compatibilidade no domínio, pode ser calculado através de:

$$A_v(i, j, k, m, n) = \int_0^1 \int_0^1 (D_k(\xi, \eta) P_i(\xi) P_j(\eta))^t P_m(\xi) P_n(\eta) d\eta d\xi. \quad (G.8)$$

Recorda-se que no caso da formulação de lajes de Reissner-Mindlin, o operador diferencial é definido por:

$$D(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} D_1(\xi, \eta) & 0 & D_2(\xi, \eta) & -1 & 0 \\ 0 & D_2(\xi, \eta) & D_1(\xi, \eta) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & D_1(\xi, \eta) & D_2(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \quad (G.9)$$

onde (D_k) se encontra definido em (4.25).

A matriz (A_v) pode ser definida à custa de apenas 3 sub-matrizes, da seguinte forma:

$$A_v(\xi, \eta) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ A_3 & 0 & A_1 \\ 0 & A_3 & A_2 \end{bmatrix} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad (G.10)$$

onde um termo genérico de cada uma das sub-matrizes, pode ser obtido de:

$$A_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left[(\alpha_2 + \gamma_2 \xi) \frac{\partial(P_i(\xi)P_j(\eta))}{\partial \xi} P_m(\xi)P_n(\eta) - (\beta_2 + \gamma_2 \eta) \frac{\partial(P_i(\xi)P_j(\eta))}{\partial \eta} P_m(\xi)P_n(\eta) \right] d\xi d\eta, \quad (G.11)$$

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 \left[(-\alpha_1 - \gamma_1 \xi) \frac{\partial(P_i(\xi)P_j(\eta))}{\partial \xi} P_m(\xi)P_n(\eta) - (-\beta_1 - \gamma_1 \eta) \frac{\partial(P_i(\xi)P_j(\eta))}{\partial \eta} P_m(\xi)P_n(\eta) \right] d\xi d\eta, \quad (G.12)$$

$$A_3 = \int_0^1 \int_0^1 - (P_i(\xi)P_j(\eta)P_m(\xi)P_n(\eta)) (J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta) d\xi d\eta. \quad (G.13)$$

Efectuando as integrações, obtém-se:

$$A_1 = \alpha_2 i \frac{1}{(i+m)(j+n+1)} + \gamma_2 i \frac{1}{(i+m+1)(j+n+1)} - \beta_2 j \frac{1}{(i+m+1)(j+n)} - \gamma_2 j \frac{1}{(i+m+1)(j+n+1)}, \quad (G.14)$$

$$A_2 = -\alpha_1 i \frac{1}{(i+m)(j+n+1)} - \gamma_1 i \frac{1}{(i+m+1)(j+n+1)} + \beta_1 j \frac{1}{(i+m+1)(j+n)} + \gamma_1 j \frac{1}{(i+m+1)(j+n+1)}, \quad (G.15)$$

$$A_3 = -J_0 \frac{1}{(i+m+1)(j+n+1)} - J_\xi \frac{1}{(i+m+2)(j+n+1)} - J_\eta \frac{1}{(i+m+1)(j+n+2)}. \quad (G.16)$$

O operador de compatibilidade (A_v) é traduzido por uma matriz com as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} \text{N}^\circ \text{ de linhas} &: \sum_{i=1}^{\text{n}^\circ \text{ elem}} \left[3 (1 + g_{sm}^i)^2 + 2 (1 + g_{sv}^i)^2 \right] \\ \text{N}^\circ \text{ de colunas} &: \sum_{i=1}^{\text{n}^\circ \text{ elem}} \left[2 (1 + g_{ut}^i)^2 + (1 + g_{uw}^i)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

G.2.3 - OPERADOR DE COMPATIBILIDADE NA FRONTEIRA (A_γ)

De acordo com a expressão (4.38), um termo genérico do operador de compatibilidade na fronteira de (A_γ), pode ser calculado através de:

$$A_\gamma = \int_0^1 (n_k(\xi, \eta) P_i(\xi) P_j(\eta))^t P_i(\gamma) d\gamma. \quad (\text{G.18})$$

Recorde-se que no caso da formulação de lajes de Reissner-Mindlin, a matriz que reúne as normais exteriores unitárias, é definida por:

$$N(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} n_x(\xi, \eta) & 0 & n_y(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & n_y(\xi, \eta) & n_x(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x(\xi, \eta) & n_y(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \quad (\text{G.19})$$

onde (n_k) se encontra definido em (4.32).

Salienta-se que a primeira linha de (N), está associada à rotação em torno do eixo (ξ), a segunda à rotação em torno do eixo (η), enquanto que a terceira linha refere-se ao deslocamento transversal.

Particularizando para cada um dos lados do elemento mestre definido figura G-1, obtém-se:

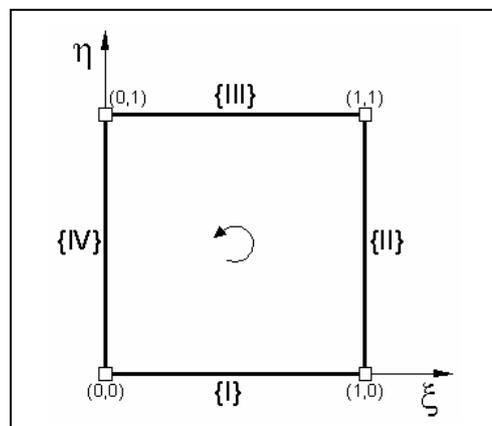


Figura G-1: Elemento Mestre utilizado no programa *Laje-Pol*.

Lado I - $(\gamma = \xi), (\eta = 0)$ e $(n_\xi, n_\eta) = (0, -1)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(I)} \\ n_y^{(I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & -\beta_2 + \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \beta_1 - \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.20})$$

$$N^{(I)} = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.21})$$

$$A_\gamma^{(I)} = \int_0^1 (N^{(I)} P_i(\xi) P_j(0))^t P_m(\xi) \partial \xi = \begin{cases} (N^{(I)})^t \frac{1}{i+m+1}, & \text{se } (j=0) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{G.22})$$

Lado II - $(\gamma = \eta), (\xi = 1)$ e $(n_\xi; n_\eta) = (1; 0)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(II)} \\ n_y^{(II)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & -\beta_2 + \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \beta_1 - \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.23})$$

$$N^{(II)} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 & 0 & -\alpha_1 - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 + \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 + \gamma_2 & -\alpha_1 - \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.24})$$

$$A_\gamma^{(II)} = \int_0^1 (N^{(II)} P_i(1) P_j(\eta))^t P_m(\eta) d\eta = (N^{(II)})^t \frac{1}{j+m+1}. \quad (\text{G.25})$$

Lado III - $(\gamma = \xi), (\eta = 1)$ e $(n_\xi, n_\eta) = (0, 1)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(III)} \\ n_y^{(III)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & -\beta_2 - \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \beta_1 + \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_2 - \gamma_2 \\ \beta_1 + \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.26})$$

$$N^{(III)} = \begin{bmatrix} -\beta_2 - \gamma_2 & 0 & \beta_1 + \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 + \gamma_1 & -\beta_2 - \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 - \gamma_2 & \beta_1 + \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.27})$$

$$A_\gamma^{(III)} = \int_0^1 (N^{(III)} P_i(\xi) P_j(1))^t P_m(\xi) \partial \xi = (N^{(III)})^t \frac{1}{i+m+1}. \quad (\text{G.28})$$

Lado IV - $(\gamma = \eta), (\xi = 0)$ e $(n_\xi; n_\eta) = (-1; 0)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(IV)} \\ n_y^{(IV)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 - \gamma_2 \eta \\ -\alpha_1 & \beta_1 + \gamma_1 \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.29})$$

$$N^{(IV)} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.30})$$

$$A_\gamma^{(IV)} = \int_0^1 (N^{(IV)} P_i(0) P_j(\eta))^t P_m(\eta) d\eta = \begin{cases} (N^{(IV)})^t \frac{1}{j+m+1}, & \text{se } (i=0) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{G.31})$$

Para cada termo não nulo de (N) , gera-se um bloco de termos com dimensão $(1 + g_{sm})^2 \times (1 + g_{uft})$, ou $(1 + g_{sv})^2 \times (1 + g_{ufw})$, conforme se trate de termos associados aos pares de esforços/deslocamentos (m, θ) ou (v, w) .

O operador de compatibilidade na fronteira (A_γ) é traduzido por uma matriz com a dimensão:

$$\begin{aligned} \text{Nº de linhas: } & \sum_{i=1}^{\text{nº elem}} [3(1 + g_{sm}^i)^2 + 2(1 + g_{sv}^i)^2] \\ \text{Nº de colunas: } & \sum_{i=1}^{\text{nº g.l.}\theta} [(1 + g_{uft}^i)] + \sum_{i=1}^{\text{nº g.l.}w} [(1 + g_{ufw}^i)] \end{aligned} \quad (G.32)$$

onde $(\text{nº g.l.}\theta)$ representa o número rotações livres, enquanto que $(\text{nº g.l.}w)$ representa o número de deslocamentos transversais livres, nas fronteiras estáticas.

G.2.4 - VECTOR DAS FORÇAS DE MASSA (Q_v)

A consideração de forças de massa uniformes pode ser obtida das expressões resultantes da particularização da expressão (4.41) para elementos trapezoidais, cujo Jacobiano da transformação de coordenadas é definido em (4.3). Um elemento genérico do vector das forças de massa pode ser calculado por:

$$Q_v(i, j, k) = \int_0^1 \int_0^1 P_i(\xi) P_j(\eta) b_k (J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta) d\eta d\xi. \quad (G.33)$$

Recorde-se que no caso da formulação de lajes de Reissner-Mindlin, o vector das forças de massa independentes (b) , é definido por:

$$b = \begin{bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{q} \end{bmatrix}, \quad (G.34)$$

Efectuando as integrações obtém-se:

$$J_0 b_k \frac{1}{(i+1)(j+1)} + J_\xi b_k \frac{1}{(i+2)(j+1)} + J_\eta b_k \frac{1}{(i+1)(j+2)}. \quad (G.35)$$

O vector terá uma dimensão total de:

$$\sum_{i=1}^{\text{nº elem}} [3(1 + g_{sm}^i)^2 + 2(1 + g_{sv}^i)^2]. \quad (G.36)$$

G.2.5 - VECTOR DAS FORÇAS NA FRONTEIRA (Q_γ)

A consideração de cargas uniformes definidas nas fronteiras dos elementos, pode ser implementada através da particularização da expressão (G.37), para cada um dos lados do elemento mestre:

$$Q_\gamma(i,k) = \int_0^1 P_i(\gamma) t_{\gamma,k} \sqrt{n_x^2(\xi,\eta) + n_y^2(\xi,\eta)} d\gamma. \quad (G.37)$$

Obtendo-se então:

Lado I - ($\gamma = \xi$) e $(n_x; n_y) = (\beta_2; \beta_1)$:

$$t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2)^2 + (\beta_1)^2} \int_0^1 P_i(\xi) d\xi = t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2)^2 + (\beta_1)^2} \frac{1}{i+1}, \quad (G.38)$$

Lado II - ($\gamma = \eta$), $(n_x; n_y) = (\alpha_2 + \gamma_2; \alpha_1 + \gamma_1)$:

$$t_{\gamma,k} \sqrt{(\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (\alpha_1 + \gamma_1)^2} \int_0^1 P_i(\eta) d\eta = t_{\gamma,k} \sqrt{(\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (\alpha_1 + \gamma_1)^2} \frac{1}{i+1}, \quad (G.39)$$

Lado III - ($\gamma = \xi$), $(n_x; n_y) = (\beta_2 + \gamma_2; \beta_1 + \gamma_1)$:

$$t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2 + \gamma_2)^2 + (\beta_1 + \gamma_1)^2} \int_0^1 P_i(\xi) d\xi = t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2 + \gamma_2)^2 + (\beta_1 + \gamma_1)^2} \frac{1}{i+1}, \quad (G.40)$$

Lado IV - ($\gamma = \eta$), $(n_x; n_y) = (\alpha_2; \alpha_1)$:

$$t_{\gamma,k} \sqrt{(\alpha_2)^2 + (\alpha_1)^2} \int_0^1 P_i(\eta) d\eta = t_{\gamma,k} \sqrt{(\alpha_2)^2 + (\alpha_1)^2} \frac{1}{i+1}. \quad (G.41)$$

Recorde-se que no caso da formulação de lajes de Reissner-Mindlin, o vector das forças na fronteira (t_γ), é definido por:

$$t_\gamma = \begin{bmatrix} \tilde{m}_x \\ \tilde{m}_y \\ \tilde{t}_z \end{bmatrix}. \quad (G.42)$$

O vector terá uma dimensão total de:

$$\sum_{i=1}^{n^\circ \text{g.l.}\theta} [(1 + g_{uft}^i)] + \sum_{i=1}^{n^\circ \text{g.l.w}} [(1 + g_{ufw}^i)], \quad (G.43)$$

onde ($n^\circ \text{g.l.}\theta$) e ($n^\circ \text{g.l.w}$) foram definidos em §G.2.3.

Anexo H

Programa *Placa-Leg*

H.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este anexo tem como objectivo principal apresentar as expressões utilizadas no cálculo dos operadores estruturais do programa denominado *Placa-Leg*. Salienta-se o trabalho de Pereira et al. [42] e de Castro [10], que serviram como ponto de partida para a formulação do programa.

Os elementos utilizados são do tipo trapezoidais (4 nós). As funções de aproximação utilizadas foram polinómios de Legendre (anexo D). A aproximação é definida pelas variáveis (g_s, g_{uv}, g_{ug}) , que representam respectivamente o grau máximo da aproximação dos campos de tensões, deslocamentos no domínio e dos deslocamentos na fronteira.

H.2 - CÁLCULO DOS OPERADORES ESTRUTURAIS

H.2.1 - OPERADOR DE FLEXIBILIDADE (F)

Particularizando a expressão (4.26) para elementos trapezoidais, cujo Jacobiano da transformação de coordenadas é definido em (C.13), um elemento genérico do operador de flexibilidade pode ser calculado por:

$$F(i,j,k,l,m,n) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\eta) f_{kl} P_m(\xi) P_n(\eta) (J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta) d\eta d\xi, \quad (H.1)$$

A expressão anterior pode ser dividida em três termos, relacionados com os termos que definem o Jacobiano. Tendo em consideração as expressões (D.13-19), obtém-se:

Termo 1:

$$f_{kl} J_0 \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi \right) = f_{kl} J_0, \text{ se } (i = m) \wedge (j = n), \quad (H.2)$$

Termo 2:

$$f_{kl} J_\xi \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) \xi d\xi \right) = \begin{cases} J_\xi f_{kl} \frac{i}{2 \lambda_i \lambda_m}, & \text{se } (i = m + 1) \wedge (j = n) \\ J_\xi f_{kl} \frac{m}{2 \lambda_i \lambda_m}, & \text{se } (i = m - 1) \wedge (j = n) \end{cases}, \quad (H.3)$$

Termo 3:

$$f_{kl} J_\eta \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) \eta d\eta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi \right) = \begin{cases} J_\eta f_{kl} \frac{j}{2 \lambda_j \lambda_n}, & \text{se } (j = n + 1) \wedge (i = m) \\ J_\eta f_{kl} \frac{n}{2 \lambda_j \lambda_n}, & \text{se } (j = n - 1) \wedge (i = m) \end{cases}. \quad (H.4)$$

Para cada termo não nulo de (f_{kl}) gera-se um bloco de termos quadrado, com dimensão $(1 + g_s)^2$, no qual os termos anteriores se definem de acordo com o exemplo apresentado no Quadro H-1, para $(g_s = 3)$.

| i | | 0 | | | | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | | | |
|---|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | n/j | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| 0 | 0 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | | | ■ - TERMO 1 ■ - TERMO 2 ■ - TERMO 3 |
| 0 | 1 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | | | |
| 0 | 3 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | | | | | |
| 1 | 1 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 1 | 2 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 1 | 3 | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 2 | 0 | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 2 | 1 | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 2 | 2 | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 2 | 3 | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 3 | 0 | | | | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 3 | 1 | | | | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 3 | 2 | | | | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 3 | 3 | | | | | | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |

Quadro H-1: Ordenamento dos termos de um bloco do operador de flexibilidade (F).

O operador de flexibilidade (F) é traduzido por uma matriz quadrada com a dimensão:

$$\sum_{i=1}^{n^\circ \text{elem}} [3 (1 + g_s^i)^2]. \quad (H.5)$$

H.2.2 - OPERADOR DE COMPATIBILIDADE NO DOMÍNIO (A_v)

De acordo com a expressão (4.36), um termo genérico do operador de compatibilidade no domínio (A_v), pode ser calculado através de:

$$A_v(i, j, k, m, n) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D_k(\xi, \eta) P_i(\xi) P_j(\eta))^t P_m(\xi) P_n(\eta) d\eta d\xi. \quad (\text{H.6})$$

Os termos associados a (D_1), resultam do cálculo de:

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) d\xi + \gamma_2 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) \xi d\xi - \\ & \beta_2 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi - \gamma_2 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) \eta d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Tendo em consideração as expressões apresentadas no anexo D, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) d\xi = \\ & \begin{cases} 2\alpha_2 \lambda_i \lambda_m, & \text{se } (j = n) \wedge (m < i) \wedge (m + i) \text{ for par} \rightarrow (\text{Termo 1}) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

$$\begin{aligned} & \gamma_2 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) \xi d\xi = \\ & \begin{cases} \gamma_2 m, & \text{se } (j = n) \wedge (i = m) \rightarrow (\text{Termo 2}) \\ 2\gamma_2 \lambda_i \lambda_m, & \text{se } (j = n) \wedge (m < i) \wedge (m + i) \text{ for par} \rightarrow (\text{Termo 3}) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

$$\begin{aligned} & -\beta_2 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi = \\ & \begin{cases} -2\beta_2 \lambda_j \lambda_n, & \text{se } (i = m) \wedge (n < j) \wedge (n + j) \text{ for ímpar} \rightarrow (\text{Termo 4}) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

$$\begin{aligned} & -\gamma_2 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta) P_n(\eta) \eta)}{\partial \eta} d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi = \\ & \begin{cases} -\gamma_2 n, & \text{se } (i = m) \wedge (n = j) \rightarrow (\text{Termo 5}) \\ -2\gamma_2 \lambda_j \lambda_n, & \text{se } (i = m) \wedge (n < j) \wedge (n + j) \text{ for par} \rightarrow (\text{Termo 6}) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

De forma idêntica para os termos associados a (D_2):

$$\begin{aligned}
& -\alpha_1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) d\xi - \gamma_1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) \xi d\xi + \\
& \beta_1 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi + \gamma_1 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) \eta d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi
\end{aligned} \quad (H.12)$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) d\xi = \\
& \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha_1 \lambda_i \lambda_m, \text{ se } (j = n) \wedge (m < i) \wedge (m + i) \text{ for par} \rightarrow (\text{Termo 1}) \\ 0, \text{ c.c.} \end{array} \right. \quad (H.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_1 \int_{-1}^1 P_j(\eta) P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_i(\xi))}{\partial \xi} P_m(\xi) \xi d\xi = \\
& \left\{ \begin{array}{l} -\gamma_1 m, \text{ se } (j = n) \wedge (i = m) \rightarrow (\text{Termo 2}) \\ -2\gamma_1 \lambda_i \lambda_m, \text{ se } (j = n) \wedge (m < i) \wedge (m + i) \text{ for par} \rightarrow (\text{Termo 3}) \\ 0, \text{ c.c.} \end{array} \right. \quad (H.14)
\end{aligned}$$

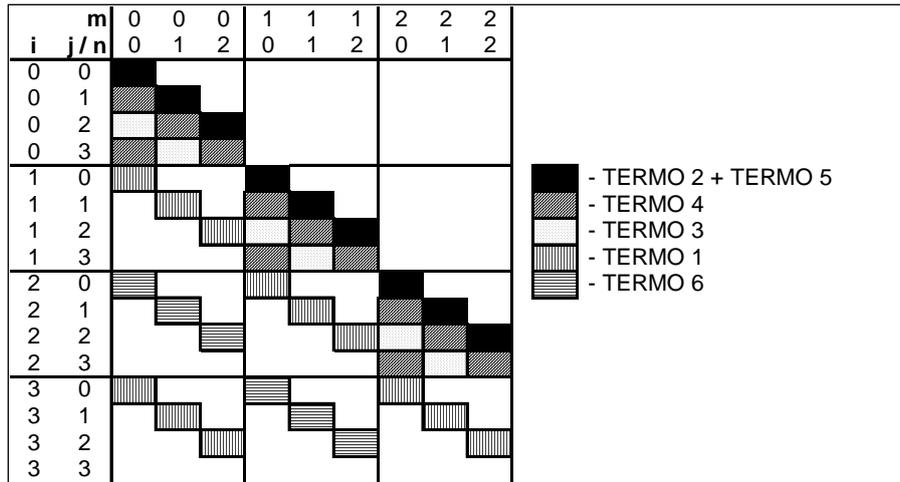
$$\begin{aligned}
& \beta_1 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi = \\
& \left\{ \begin{array}{l} 2\beta_1 \lambda_j \lambda_n, \text{ se } (i = m) \wedge (n < j) \wedge (n + j) \text{ for ímpar} \rightarrow (\text{Termo 4}) \\ 0, \text{ c.c.} \end{array} \right. \quad (H.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \int_{-1}^1 \frac{\partial(P_j(\eta))}{\partial \eta} P_n(\eta) \eta d\eta \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_m(\xi) d\xi = \\
& \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 n, \text{ se } (i = m) \wedge (n = j) \rightarrow (\text{Termo 5}) \\ 2\gamma_1 \lambda_j \lambda_n, \text{ se } (i = m) \wedge (n < j) \wedge (n + j) \text{ for par} \rightarrow (\text{Termo 6}) \\ 0, \text{ c.c.} \end{array} \right. \quad (H.16)
\end{aligned}$$

Para cada termo (D_k) , gera-se um bloco de termos com dimensão $(1 + g_s)^2 \times (1 + g_{uv})^2$, com a posição definida de acordo com o exemplo apresentado no Quadro H-2, para $(g_s = 3, g_{uv} = 2)$.

O operador de compatibilidade (A_v) é traduzido por uma matriz com a dimensão:

$$\begin{aligned}
\text{N}^\circ \text{ de linhas : } & \sum_{i=1}^{n^\circ \text{ elem}} [3(1 + g_s^i)^2] \\
\text{N}^\circ \text{ de colunas : } & \sum_{i=1}^{n^\circ \text{ elem}} [2(1 + g_{uv}^i)^2]
\end{aligned} \quad (H.17)$$



Quadro H-2: Ordenamento dos termos de um bloco do operador (A_v).

H.2.3 - OPERADOR DE COMPATIBILIDADE NA FRONTEIRA (A_γ)

De acordo com a expressão (4.46), um termo genérico do operador de compatibilidade na fronteira (A_γ), pode ser calculado através de:

$$A_\gamma = \int_{-1}^1 (\eta_k(\xi, \eta) P_i(\xi) P_j(\eta))^t P_l(\gamma) d\gamma, \tag{H.18}$$

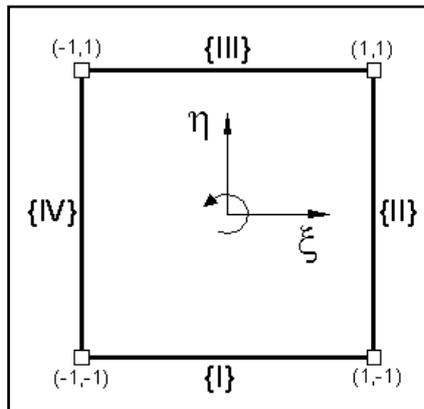


Figura H-1: Elemento Mestre utilizado no programa *Placa-Leg*.

Refira-se que a primeira linha de (N) , está associada ao deslocamento segundo (ξ) , enquanto que a segunda linha está associada ao deslocamento segundo (η) .

Particularizando para cada um dos lados do elemento mestre definido figura G-1, obtêm-se:

Lado I - ($\gamma = \xi$), ($\eta = -1$) e $(n_\xi; n_\eta) = (0; -1)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(i)} \\ n_y^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & -\beta_2 + \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \beta_1 - \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 - \gamma_2 \\ -\beta_1 + \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.19})$$

$$N^{(i)} = \begin{bmatrix} \beta_2 - \gamma_2 & 0 & -\beta_1 + \gamma_1 \\ 0 & -\beta_1 + \gamma_1 & \beta_2 - \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.20})$$

$$A_\gamma^{(i)} = \int_{-1}^1 (N^{(i)} P_i(\xi) P_j(-1))^t P_m(\xi) d\xi = P_j(-1) N^{(i)}, \text{ se } (i = m). \quad (\text{H.21})$$

Lado II - $(\gamma = \eta)$, $(\xi = 1)$ e $(n_\xi; n_\eta) = (1; 0)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(ii)} \\ n_y^{(ii)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 & -\beta_2 - \gamma_2 \eta \\ -\alpha_1 - \gamma_1 & \beta_1 + \gamma_1 \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.22})$$

$$N^{(ii)} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 & 0 & -\alpha_1 - \gamma_1 \\ 0 & -\alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 + \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.23})$$

$$A_\gamma^{(ii)} = \int_{-1}^1 (N^{(ii)} P_i(1) P_j(\eta))^t P_m(\eta) d\eta = P_i(1) N^{(ii)}, \text{ se } (j = m). \quad (\text{H.24})$$

Lado III - $(\gamma = \xi)$, $(\eta = 1)$ e $(n_\xi; n_\eta) = (0; 1)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(iii)} \\ n_y^{(iii)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & -\beta_2 - \gamma_2 \\ -\alpha_1 - \gamma_1 \xi & \beta_1 + \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_2 - \gamma_2 \\ \beta_1 + \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.25})$$

$$N^{(iii)} = \begin{bmatrix} -\beta_2 - \gamma_2 & 0 & \beta_1 + \gamma_1 \\ 0 & \beta_1 + \gamma_1 & -\beta_2 - \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.26})$$

$$A_\gamma^{(iii)} = \int_{-1}^1 (N^{(iii)} P_i(\xi) P_j(1))^t P_m(\xi) d\xi = P_j(1) N^{(iii)}, \text{ se } (i = m). \quad (\text{H.27})$$

Lado IV - $(\gamma = \eta)$, $(\xi = -1)$ e $(n_\xi; n_\eta) = (-1; 0)$:

$$\begin{bmatrix} n_x^{(iv)} \\ n_y^{(iv)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 - \gamma_2 & -\beta_2 - \gamma_2 \eta \\ -\alpha_1 + \gamma_1 & \beta_1 + \gamma_1 \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 + \gamma_2 \\ \alpha_1 - \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.28})$$

$$N^{(iv)} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 + \gamma_2 & 0 & \alpha_1 - \gamma_1 \\ 0 & \alpha_1 - \gamma_1 & -\alpha_2 + \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.29})$$

$$A_\gamma^{(iv)} = \int_{-1}^1 (N^{(iv)} P_i(-1) P_j(\eta))^t P_m(\eta) d\eta = P_i(-1) N^{(iv)}, \text{ se } (j = m). \quad (\text{H.30})$$

Para cada termo não nulo de (N) , gera-se um bloco de termos com dimensão $(1 + g_s)^2 \times (1 + g_{uy})$, com a posição definida de acordo com o exemplo apresentado no Quadro H-3, para $(g_s = 3, g_{uy} = 2)$.

| i | j/m | 0 | 1 | 2 | | i | j/m | 0 | 1 | 2 | |
|---|-----|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|--|
| 0 | 0 | ■ | | | <p>■ - LADOS I e III ■ - LADOS II e IV</p> | | | | | | |
| 0 | 1 | | ■ | | | | | | | | |
| 0 | 2 | | | ■ | | | | | | | |
| 0 | 3 | | | | | ■ | | | | | |
| 1 | 0 | | ■ | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | ■ | | | | | | | | |
| 1 | 2 | | | ■ | | | | | | | |
| 1 | 3 | | | | | ■ | | | | | |
| 2 | 0 | | | ■ | | | | | | | |
| 2 | 1 | | | ■ | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | ■ | | | | | | | |
| 2 | 3 | | | ■ | | | | | | | |
| 3 | 0 | | | | ■ | | | | | | |
| 3 | 1 | | | | ■ | | | | | | |
| 3 | 2 | | | | ■ | | | | | | |
| 3 | 3 | | | | ■ | | | | | | |

Quadro H-3: Ordenamento dos termos de um bloco do operador (A_γ).

O operador de compatibilidade (A_γ) é traduzido por uma matriz com a dimensão:

$$\begin{aligned}
 \text{N}^\circ \text{ de linhas} &: \sum_{i=1}^{\text{n}^\circ \text{ elem}} [3 (1 + g_s^i)^2] \\
 \text{N}^\circ \text{ de colunas} &: \sum_{i=1}^{\text{n}^\circ \text{ g.l.}} [(1 + g_{u\gamma}^i)]
 \end{aligned}
 \tag{H.31}$$

H.2.4 - VECTOR DAS FORÇAS DE MASSA (Q_v)

As forças de massa uniformes podem ser consideradas utilizando a particularização da expressão (4.57) para elementos trapezoidais, cujo Jacobiano da transformação de coordenadas é definido em (C.13). Um elemento genérico do vector das forças de massa pode ser calculado por:

$$Q_v(i,j,k) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\eta) b_k (J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta) d\eta d\xi.
 \tag{H.32}$$

A expressão anterior pode ser dividida em três termos, relacionados com os termos que definem o Jacobiano. Tendo em consideração as expressões apresentadas no anexo D, obtém-se:

Termo 1:

$$\begin{aligned}
 J_0 b_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\eta) d\eta d\xi &= J_0 b_k \int_{-1}^1 P_i(\xi) \frac{P_0(\xi)}{\lambda_0} d\xi \int_{-1}^1 P_j(\eta) \frac{P_0(\eta)}{\lambda_0} d\eta \\
 &= \begin{cases} \frac{J_0 b_k}{\lambda_0}, & \text{se } (i=j=0) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{H.33}$$

Termo 2:

$$\begin{aligned}
 J_\xi b_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\eta) \xi \, d\eta d\xi &= J_\xi b_k \int_{-1}^1 P_i(\xi) \frac{P_0(\xi)}{\lambda_0} \xi \, d\xi \int_{-1}^1 P_j(\eta) \frac{P_0(\eta)}{\lambda_0} \, d\eta \\
 &= \begin{cases} J_\xi b_k m \\ 2 (\lambda_0)^2 \lambda_i \end{cases}, \text{ se } (i=1) \wedge (j=0) \\
 &= \begin{cases} 0, \text{ c.c.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{H.34}$$

Termo 3:

$$\begin{aligned}
 J_\eta b_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\eta) \eta \, d\eta d\xi &= J_\eta b_k \int_{-1}^1 P_i(\xi) \frac{P_0(\xi)}{\lambda_0} \, d\xi \int_{-1}^1 P_j(\eta) \frac{P_0(\eta)}{\lambda_0} \eta \, d\eta \\
 &= \begin{cases} J_\eta b_k n \\ 2 (\lambda_0)^2 \lambda_j \end{cases}, \text{ se } (i=0) \wedge (j=1) \\
 &= \begin{cases} 0, \text{ c.c.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{H.35}$$

A posição dos termos anteriores no vector das forças massa associado a um elemento, encontra-se definido no Quadro H-4, para $(g_s = 3)$.

O vector terá um tamanho total de:

$$\sum_{i=1}^{n^\circ \text{ elem}} [2 (1 + g_{uv}^i)^2] \tag{H.36}$$

Para a consideração de deformações térmicas uniformes, obter-se-ia um conjunto de termos semelhantes aos anteriores, bastando trocar o termo do vector das forças de massa (b_k) , pelo termo das deformações térmicas independentes (ε_θ) correspondente.

| i | j | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | ■ |
| 0 | 1 | ▨ |
| 0 | 2 | |
| 0 | 3 | |
| 1 | 0 | ▩ |
| 1 | 1 | |
| 1 | 2 | ■ |
| 1 | 3 | ▨ |
| 2 | 0 | |
| 2 | 1 | |
| 2 | 2 | |
| 2 | 3 | |
| 3 | 0 | |
| 3 | 1 | |
| 3 | 2 | |
| 3 | 3 | |

■ - TERMO 1
 ▨ - TERMO 2
 ▩ - TERMO 3

Quadro H-4: Ordenamento dos termos do vector das forças de massa (Q_v) .

H.2.5 - VECTOR DAS FORÇAS NA FRONTEIRA (Q_γ)

A consideração de cargas uniformes definidas nas fronteiras dos elementos, pode ser implementada através da particularização da expressão (4.59), para cada um dos lados do elemento mestre:

$$Q_\gamma(i,k) = \int_{-1}^1 P_i(\gamma) t_{\gamma,k} \sqrt{n_x^2(\xi,\eta) + n_y^2(\xi,\eta)} d\gamma. \quad (\text{H.37})$$

Lado I - ($\gamma = \xi$) e $(n_x; n_y) = (\beta_2 - \gamma_2; -\beta_1 + \gamma_1)$:

$$\begin{aligned} & t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2 - \gamma_2)^2 + (-\beta_1 + \gamma_1)^2} \int_{-1}^1 P_i(\xi) \frac{P_0(\xi)}{\lambda_0} d\xi = \\ & = \begin{cases} \frac{t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2 - \gamma_2)^2 + (-\beta_1 + \gamma_1)^2}}{\lambda_0}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{H.38})$$

Lado II - ($\gamma = \eta$), $(n_x; n_y) = (\alpha_2 + \gamma_2; -\alpha_1 - \gamma_1)$:

$$\begin{aligned} & t_{\gamma,k} \sqrt{(\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (-\alpha_1 - \gamma_1)^2} \int_{-1}^1 P_i(\eta) \frac{P_0(\eta)}{\lambda_0} d\eta = \\ & = \begin{cases} \frac{t_{\gamma,k} \sqrt{(\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (-\alpha_1 - \gamma_1)^2}}{\lambda_0}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{H.39})$$

Lado III - ($\gamma = \xi$), $(n_x; n_y) = (-\beta_2 - \gamma_2; \beta_1 + \gamma_1)$:

$$\begin{aligned} & t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2 - \gamma_2)^2 + (-\beta_1 + \gamma_1)^2} \int_{-1}^1 P_i(\xi) \frac{P_0(\xi)}{\lambda_0} d\xi = \\ & = \begin{cases} \frac{t_{\gamma,k} \sqrt{(\beta_2 - \gamma_2)^2 + (-\beta_1 + \gamma_1)^2}}{\lambda_0}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{H.40})$$

Lado IV - ($\gamma = \eta$), $(n_x; n_y) = (-\alpha_2 + \gamma_2; \alpha_1 - \gamma_1)$:

$$\begin{aligned} & t_{\gamma,k} \sqrt{(-\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (\alpha_1 - \gamma_1)^2} \int_{-1}^1 P_i(\xi) \frac{P_0(\xi)}{\lambda_0} d\xi = \\ & = \begin{cases} \frac{t_{\gamma,k} \sqrt{(-\alpha_2 + \gamma_2)^2 + (\alpha_1 - \gamma_1)^2}}{\lambda_0}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{H.41})$$

Para cada fronteira estática, o termo genérico calculado pelas expressões anteriores, insere-se na posição do vector das forças na fronteira, apresentada no Quadro H-5.

| m | | |
|---|---|-----------------------|
| 0 | ■ | - LADOS I,II,III e IV |
| 1 | | |
| 2 | | |

Quadro H-5: Ordenamento dos termos do vector das forças de fronteira (Q_γ).

O vector terá um tamanho total de:

$$\sum_{i=1}^{n^{\circ} \text{ g.l.}} [1 + g_{u\gamma}^i]. \quad (\text{H.42})$$

Anexo I

Fórmulas e Teoremas Matemáticos

Neste anexo são apresentados as principais fórmulas e os teoremas matemáticos utilizados ao longo deste trabalho. O seu objectivo principal é o de tornar o texto o mais auto-suficiente possível, fornecendo ao leitor uma informação rápida e precisa, sobre os aspectos de índole matemática relevante.

Textos mais detalhados sobre estes assuntos podem ser encontrados em [11, 24, 57].

I.1 - REGRAS E TEOREMAS DE DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

Regra de derivação de função composta $\{g(u), u(x)\}$:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx}. \quad (I.1)$$

Diferencial de uma função de várias variáveis $(f(x_1, x_2, \dots, x_n))$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (I.2)$$

Regra da integração por partes $\{u(x), v(x)\}$:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx. \quad (1.3)$$

Regra de Leibnitz, para integrais definidos:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} F(x, \alpha) \, dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \, dx + F(\varphi_1, \alpha) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - F(\varphi_2, \alpha) \frac{d\varphi_2}{d\alpha}, \quad (1.4)$$

Se (φ_1, φ_2) não dependerem de (α) , obtem-se:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x, \alpha) \, dx = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \, dx. \quad (1.5)$$

Teorema do valor médio para integrais definidos:

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = (b - a) f(c), \quad \text{onde } c \in [a, b]. \quad (1.6)$$

I.2 - GRADIENTE DE UM CAMPO ESCALAR

Seja (f) uma função escalar definida num sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , com versores (i, j, k) , que tem as primeiras derivadas parciais contínuas. Define-se o seu gradiente, como uma grandeza vectorial, definida por:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k, \quad (1.7)$$

onde a grandeza vectorial assim definida, caso não seja nula, tem em cada ponto a direcção do incremento máximo de (f) .

Facilmente se demonstra [30] que, num ponto $(P(x, y, z))$ o vector (∇f) é normal à superfície definida por (1.8):

$$f(x, y, z) = \text{const}. \quad (1.8)$$

I.3 - DIVERGÊNCIA DE UM CAMPO VECTORIAL

Seja $(v(x, y, z))$ uma função vectorial diferenciável, definida em coordenadas cartesianas (x, y, z) , pelas componentes (v_1, v_2, v_3) . Define-se a divergência do campo vectorial (v) , por:

$$\text{div } v = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}. \quad (1.9)$$

I.4 - TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS

Seja (S) uma superfície fechada que encerra o domínio (V), definida em cada ponto com um único vector normal e exterior (n). Seja (u(x,y,z)) uma função vectorial continua e com primeiras derivadas parciais contínuas. Verifica-se que:

$$\int \int \int_V \text{div} \mathbf{u} \, dV = \int \int_S \mathbf{u}_n \, dS, \tag{I.10}$$

onde (u_n) representa a componente normal e exterior à superfície (S) do campo vectorial (u), definida por:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \tag{I.11}$$

I.5 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA - REGRAS DE QUADRATURA

O cálculo numérico de um integral definido pode ser efectuado recorrendo às regras de quadratura, definidas por:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) J(x(\xi)) \, d\xi = \sum_{i=1}^N f(x(\xi_i)) J(x(\xi_i)) w_i, \quad \text{com } x_i \in [a,b], \tag{I.12}$$

onde (x_i) são denominados por pontos de integração (x_i ∈ [a,b]), (w_i) são os pesos a dar a cada ponto, e (N) representa a ordem da fórmula.

I.5.1 - PONTOS DE INTEGRAÇÃO DE GAUSS

| n | ±x _i | w _i | n | ±x _i | w _i |
|---|--|--|---|---|--|
| 1 | 0.0000000000000000 | 2.0000000000000000 | 6 | 0.238619186083197 0.661209386466265 0.932469514203152 | 0.467913934572691 0.360761573048139 0.171324492379170 |
| 2 | 0.577350269189626 | 1.0000000000000000 | 7 | 0.0000000000000000 0.405845151377397 0.741531185599394 0.949107912342759 | 0.417959183673469 0.381830050505119 0.279705391489277 0.129484966168870 |
| 3 | 0.0000000000000000 0.774596669241483 | 0.8888888888888889 0.5555555555555556 | 8 | 0.183434642495650 0.525532409916329 0.796666477413627 0.960289856497536 | 0.362683783378362 0.313706645877887 0.222381034453374 0.101228536290376 |
| 4 | 0.339981043584856 0.861136311594053 | 0.652145154862546 0.347854845137454 | | | |
| 5 | 0.0000000000000000 0.538469310105683 0.906179845938664 | 0.5688888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189 | | | |

Quadro I-1: Pontos de integração de Gauss.

| n | $\pm x_i$ | w_i | n | $\pm x_i$ | w_i |
|----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 9 | 0.000000000000000 | 0.330239355001260 | 12 | 0.125233408511469 | 0.249147045813403 |
| | 0.324253423403809 | 0.312347077040003 | | 0.367831498998180 | 0.233492536538355 |
| | 0.613371432700590 | 0.260610696402935 | | 0.587317954286617 | 0.203167426723066 |
| | 0.836031107326636 | 0.180648160694857 | | 0.769902674194305 | 0.160078328543346 |
| | 0.968160239507626 | 0.081274388361574 | | 0.904117256370475 | 0.106939325995318 |
| 10 | 0.148874338981631 | 0.295524224714753 | 0.981560634246719 | 0.047175336386512 | |
| | 0.433395394129247 | 0.269266719309996 | | | |
| | 0.679409568299024 | 0.219086362515982 | | | |
| | 0.865063366688985 | 0.149451349150581 | | | |
| | 0.973906528517172 | 0.066671344308688 | | | |

Quadro I-2: Pontos de integração de Gauss (continuação).

I.5.2 - PONTOS DE INTEGRAÇÃO DE LOBATTO

| n | $\pm x_i$ | w_i | n | $\pm x_i$ | w_i |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.000000000 | 2.000000000 | 8 | 0.209299218 | 0.412458795 |
| | | | | 0.591700181 | 0.341122692 |
| 2 | 1.000000000 | 1.000000000 | | 0.871740149 | 0.210704227 |
| | | | | 1.000000000 | 0.035714286 |
| 3 | 0.000000000 | 1.333333333 | 9 | 0.000000000 | 0.371519274 |
| | 1.000000000 | 0.333333333 | | 0.363117464 | 0.346428511 |
| 4 | 0.447213596 | 0.833333333 | | 0.677186280 | 0.274538713 |
| | 1.000000000 | 0.166666667 | | 0.899757995 | 0.165495362 |
| 5 | 0.000000000 | 0.711111111 | 1.000000000 | 0.027777778 | |
| | 0.654653671 | 0.544444444 | 10 | 0.165278958 | 0.327539761 |
| | 1.000000000 | 0.100000000 | | 0.477924950 | 0.292042684 |
| 6 | 0.285231516 | 0.554858377 | | 0.738773865 | 0.224889342 |
| | 0.765055324 | 0.378474956 | | 0.919533908 | 0.133305991 |
| | 1.000000000 | 0.066666667 | 1.000000000 | 0.022222222 | |
| 7 | 0.000000000 | 0.487619048 | | | |
| | 0.468848793 | 0.431745381 | | | |
| | 0.830223896 | 0.276826047 | | | |
| | 1.000000000 | 0.047619048 | | | |

Quadro I-3: Pontos de integração de Lobatto.

Referências

- [1] ADINA - Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis - 900 Nodes Version 7.4.0 - Adina R & D, Inc, (2000).
- [2] ALMEIDA, J. P. B. M. - *Modelos de Elementos Finitos para a Análise Elastoplástica*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1991).
- [3] ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; BLACKFORD, S.; DEMMEL, J.; DONGARRA, J.; DU CROZ, J.; GREENBAUM, A.; HAMMARLING, S.; MCKENNEY, A.; SORENSEN, D. - *LAPACK User's Guide*, Third Edition, SIAM, Philadelphia, (1999).
- [4] ARANTES E OLIVEIRA, E. R. - *Resistência dos Materiais - Livro 2: Elementos da Teoria da Elasticidade* - AEIST, Lisboa, (1969).
- [5] ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. - *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth Scientific Publications, London, (1960).
- [6] BARBOSA, A. R. - *Wavelets no Intervalo, Aplicação a Elementos Finitos*, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (2001).
- [7] BATHE, K. J. - *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1982).
- [8] BUSSAMRA, F. - *Elementos Finitos Híbridos-Trefftz: Um Modelo Elastoplástico Tridimensional* - Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, (1999).
- [9] CASTRO, L. M. S. S. - *Interpolação de Walsh em Problemas de Elasticidade Plana*, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1992).
- [10] CASTRO, L. M. S. S. - *Wavelets e Séries de Walsh em Elementos Finitos* - Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1996).
- [11] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. - *Numerical Methods for Engineers* - Third Edition, McGraw Hill, Singapore, (1998).
- [12] CHEN, W.; SALEEB, A. - *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 1: Elasticity and Modeling* - Elsevier, (1994).

- [13] CHEN, W. - *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 2: Plasticity and Modeling* - Elsevier, (1994).
- [14] CISMASIU, I. - *Parallel Algorithms for Non-Conventional Finite Element Computation on Distributed Architectures*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (2001).
- [15] CLOUGH, R. W. - *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Journal of Structures Division, ASCE, Proceedings of 2d Conference on Electronic Computation, pp. 345-378, (1960).
- [16] COULOMB, C. A. - *Sur une application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a l'architecture*, Acad. R. Sci. Mem. Math. Phys. par divers svants, Vol. 7, pp. 343-382, (1973).
- [17] COURANT, R.; *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 49, pp. 1-43, (1943).
- [18] CRISFIELD, M. A. - *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Volume 1, John Wiley & Sons Ltd, (1991).
- [19] DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. - *Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design*, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 10, pp. 157-165, (1952).
- [20] FREITAS, J. A. T.; ALMEIDA, J. P. B. M.; PEREIRA, E. M. B. R. - *Non-conventional Formulations for the Finite Element Method*, Computational Mechanics, Volume 23, Number 5-6, pp. 488-501, Springer, (1999).
- [21] FREITAS, J. A. T.; CISMASIU, C.; WANG, Z. M. - *Comparative Analysis of Hybrid-Trefftz Stress and Displacements Elements*, Archives of Computational Mechanics Engineering, 6(2): pp. 1-26, (1999).
- [22] FREITAS, J. A. T.; ZHEN-TI, J. - *Hybrid-Trefftz Equilibrium Model for Crack Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 569-584, (1996).
- [23] FREITAS, J. A. T.; ZHEN-TI, J. - *Hybrid-Trefftz Finite Element Formulation for Simulation of Singular Stress Fields*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 281-308, (1996).
- [24] GALERKIN, B. G.; *Series Solution of Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates*, Vestn. Inzh. Tech., vol. 19, pp. 897-908, (1915).
- [25] GAUSS, C. F.; *Carl Friedrich Gauss Werks*, Vol. VII, Gottingen, (1871).

- [26] HRENIKOFF, A.; *Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method*, Transactions of the ASME, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 8, pp. 169-175, (1941).
- [27] JIROUSEK, J.; LEON, N. - *A Powerful Finite Element for Plate Bending*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 12, pp. 77-96, (1977).
- [28] JIROUSEK, J.; WROBLEWSKI, A. - *T-Elements: State of the Art and Future Trends*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art, Vol. 3, nº4, pp. 323-434, (1996).
- [29] KACHANOV, L. M. - *Fundamentals of Theory of Plasticity* - Mir Publishers, Moscow, (1974).
- [30] KREYSZIG, E. - *Advanced Engineering Mathematics* - Fourth Edition, John Wiley & Sons, (1979).
- [31] LIEBMAN, H.; *Die Angenäherte Ermittlung: Harmonischen, Functionen und Konformer Abbildung*, Sitzber. Math. Physik Kl. Bayer Akad. Wiss., vol. 3, pp. 65-75, Munique, (1918)
- [32] LODE, W. - *Versuche ueber den Einfluss der mitt leren Hauptspannung auí das Fliessen der Metalle Eisen Kupfer und Nickel*, Zeitschrift fuer Physik, 36, pp. 913-939 (1926).
- [33] LOURENÇO, M. F. - *Elementos Finitos de Tensão - Aplicação à Análise Elastoplástica de Estruturas Laminares Planas* - Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1999).
- [34] MATLAB - The Language Of Technical Computing - Version 6.5.0.180913a R13 - The MathWorks Inc., (1984-1999).
- [35] NAYAK, G. C.; ASCE, A. M.; ZIENKIEWICZ, O. C.; ASCE, F. - *Convenient Form Of Stress Invariants for Plasticity*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineering (ASCE), Vol. 98, nº ST4, pp. 949-954 (1972).
- [36] NAYAK, G. C.; ZIENKIEWICZ, O. C. - *Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, pp. 113-135 (1972).
- [37] PAPADOPOULOS, P.; TAYLOR, R. L. - *A Triangular Element Based on Reissner Mindlin Plate Theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 1029-1049, (1990).
- [38] PARREIRA, P. - *Introdução aos Elementos Finitos - Elementos de apoio à disciplina de Análise de Estruturas, Licenciatura de Engenharia Civil*, IST-Lisboa, (1999).

- [39] PEREIRA, E. M. B. R. - *Elementos Finitos de Tensão, Aplicação à Análise Elástica de Estruturas*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1993).
- [40] PEREIRA, E. M. B. R.; FREITAS, J. A. T. - *A Hybrid-Mixed Finite Element Model Based on Legendre Polynomials for Reissner-Mindlin Plates* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering -Elsevier Science S.A., nº136, pp.111-126 (1996).
- [41] PEREIRA, E. M. B. R.; FREITAS, J. A. T. - *A Mixed-Hybrid Finite Element Model Based on Orthogonal Functions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 1295-1312, (1996).
- [42] PEREIRA, E. M. B. R.; FREITAS, J. A. T. - *Implementation of a Mixed-Hybrid Finite Element Model Based on Legendre Polynomials*, Education - Practice and Promotion of Computational Methods Using Small Computers, pp. 987-992, Macau, (1995).
- [43] PEREIRA, E. M. B. R.; FREITAS, J. A. T. - *Numerical Implementation of a Hybrid-Mixed Finite Element Model for Reissner-Mindlin Plates* - Computers & Structures - Elsevier Science Ltd, nº74, pp. 323-334, (2000).
- [44] PEREIRA, O. J. B. A. - *Um Modelo de Elementos Finitos de Equilíbrio Para Elasticidade Tridimensional*, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1993).
- [45] PEREIRA, O. J. B. A. - *Utilização de Elemento Finitos de Equilíbrio Em Refinamento Adaptativo*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1996).
- [46] PIAN, T. H. H. - *A Historical Note About Hibrid Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp.891-892, (1978).
- [47] PIAN, T. H. H.; TONG, P. - *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 1, pp. 3-28, (1969).
- [48] RAYLEIGH, J. W. S.; *On the Theory of Resonance*, Trans. Royal Society., A161, pp. 77-118, Londres (1870).
- [49] RAZZAQUE, A. - *Program for Triangular Bending Elements With Derivate Smoothing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pp. 333-343, (1973).
- [50] REBELO, J. S. - *Modelos de Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (1993).

- [51] REDDY, J. N. - *An Introduction to The Finite Element Method* - Second Edition, McGraw-Hill Inc. (1993).
- [52] RICHARDSON, L. F.; *The Approximate Arithmetical Solution by Finite differences of Physical Problems*, Trans. Royal Society, A210, pp, 307-57, Londres, (1910).
- [53] RITZ, W.; *Über Eine Neue Methode zur Lösung Gewissen Variations - Probleme der Mathematischen Physik*, J. Reine Angew. Math., 135, pp. 1-61, (1909)
- [54] ROUFAEIL, O. L. - *A New Four-Node Quadrilateral Plate Bending Element*, Computers & Structures, Vol. 54, nº 5, pp. 871-879, (1995).
- [55] SAP2000 - Structural Analysis Program - Non Linear Version 6.11 - Computers & Structures, Inc., (1984-1997).
- [56] SOUTHWELL, R. V.; *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press, (1946).
- [57] SPIEGEL, R. M.; ABELLANAS, L. - *Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada* - Schaum, McGraw-Hill, (1990).
- [58] TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. - *Theory of Elasticity*, 3ª edição, McGraw-Hill, Tóquio, (1982).
- [59] TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. - *Theory of plates and Shells* - 2ª edição, McGraw Hill, (1959).
- [60] TRESCA, H. - *Sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pression*, Compt. Rend., Vol. 59, p.754, (1864).
- [61] TURNER, M.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. H., TOPP, L.; *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, Journal of Aeronautical Science, vol. 23, pp. 805-823, (1956).
- [62] VICENTE DA SILVA, M. J. - *Elementos Finitos Híbridos-Mistos de Tensão - Aplicação à Análise de Barragens de Abóbada* - Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (2001).
- [63] VICENTE DA SILVA, M.; PEREIRA, E. - *Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Placas* - Relatório ICIST, DTC nº12/99 (1999).
- [64] VON MISES, R. - *Mechanik der festen Koerper in Plastisch deformabelm Zustand*, Geottinger Nachr. Math. Phys., pp. 582-592, (1913).

- [65] WANG, Z. - *Elastoplastic Structural Analysis with Hybrid Stress Elements* - Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, (2000).
- [66] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. - *The Finite Element Method - Volume 1 - Basic Formulation and Linear Problems* - Fourth Edition, Londres, (1991).
- [67] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. - *The Finite Element Method - Volume 2 - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity* - Fourth Edition, Londres, (1991).