

## TÉCNICAS DE CONTROLO DA CEDÊNCIA EM ANÁLISES ELASTOPLÁSTICAS COM MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-MISTOS DE TENSÃO

**Luís A. M. Mendes\*** e **Luís M. S. S. Castro\*\***

\* Bolseiro de Iniciação à Investigação Científica, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.  
Avenida do Brasil 101, 1700-066 Lisboa - PORTUGAL  
e-mail: luismm@lnec.pt

\*\* Professor Auxiliar, Dept. Engenharia Civil e Arquitectura, Instituto Superior Técnico  
Avenida Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa - PORTUGAL  
e-mail: luis@civil.ist.utl.pt, web <http://www.civil.ist.utl.pt/~luis>

**Palavras-chave:** Elementos Finitos, Modelos Híbridos-Mistos, Análise Elastoplástica, Polinómios de Legendre.

**Resumo.** *Nesta comunicação é apresentado um estudo sobre o desempenho de diferentes técnicas de controlo da cedência em análises elastoplásticas, nomeadamente a técnica de controlo baseada em pontos de colocação (PC) e em células plásticas (CP). Foi implementado um modelo de plasticidade local, sendo as relações associadas ao desenvolvimento das deformações plásticas impostas de forma ponderada. Para efectuar a ponderação, a técnica PC recorre a funções de Dirac, permitindo efectuar o controlo de forma pontual. Na técnica CP a ponderação é efectuada com funções polinomiais até ao segundo grau, permitindo incluir no controlo todo o domínio de definição da célula.*

*É apresentado um estudo que pretende caracterizar e comparar o desempenho destas técnicas, quanto à qualidade de resultados obtidos e quanto à sua eficiência face à densidade da malha de controlo.*

*O modelo de elementos finitos que serviu como suporte a este estudo foi o modelo híbrido-misto de tensão. Nesta formulação são aproximados de forma independente e simultânea, os campos de tensões e de deslocamentos no domínio e o campo de deslocamentos ao longo das fronteiras estáticas. Para efectuar estas aproximações recorre-se a polinómios ortogonais de Legendre. As condições fundamentais do problema são impostas na forma de resíduos pesados. A integração das relações constitutivas foi efectuada com recurso ao método implícito de Euler, pelo que houve a necessidade de se implementarem técnicas iterativas, nomeadamente o método de Newton-Raphson.*

## 1 INTRODUÇÃO

Esta comunicação surge na sequência de diversos trabalhos no domínio das formulações não convencionais do método dos elementos finitos [1, 2, 3, 4, 5] e, em particular, na sequência do trabalho apresentado pelos autores no *Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional – Évora 2003* [6].

O seu objectivo principal reside na divulgação dos resultados do estudo do desempenho de diferentes técnicas de controlo da cedência, quando combinadas com a utilização do modelo Híbrido-Misto de Tensão (HMT). O desempenho destas metodologias de controlo é fortemente condicionada pela utilização do modelo HMT e pelas funções de aproximação consideradas (polinómios de Legendre), pelo que não é possível generalizar as conclusões obtidas a outros modelos numéricos, tais como o modelo tradicional de compatibilidade ou outros modelos não convencionais.

A comunicação encontra-se organizada em 5 secções, para além desta introdução. Numa primeira fase é apresentada de forma sucinta a formulação do problema, seguida pela definição do modelo de elementos finitos. Informações mais detalhadas podem ser encontradas noutros trabalhos dos autores [6, 7]. São depois abordadas as questões relacionadas com a implementação das técnicas de controlo, apresentados os exemplos de aplicação e enunciadas as conclusões finais.

A ilustração da utilização do modelo é efectuada com base na análise elasto-plástica de uma placa do tipo consola curta. Os resultados obtidos são validados com informação proveniente de outras formulações numéricas.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se um domínio  $V$ , tal como se encontra ilustrado na Figura 1, delimitado pela fronteira  $\Gamma$ , sujeito a forças de massa  $b$  e a forças aplicadas na fronteira  $t_\gamma$ . Considera-se a fronteira cinemática  $\Gamma_u$  e a fronteira estática  $\Gamma_\sigma$ , como as regiões da fronteira onde são conhecidos respectivamente os deslocamentos e as tensões aplicadas.

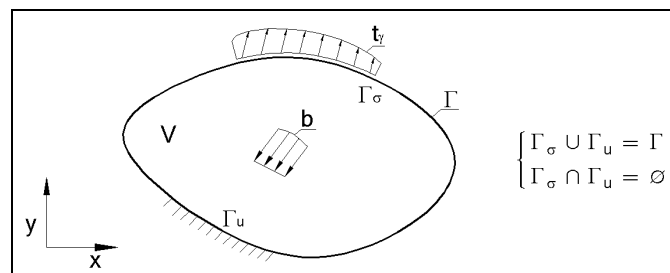


Figura 1 - Domínio  $V$  e fronteiras  $\Gamma_\sigma$  e  $\Gamma_u$  do meio contínuo a analisar.

As equações de equilíbrio podem ser definidas na forma matricial [8]:

$$D \sigma + b = 0 \text{ em } V, \quad (1)$$

$$N \sigma = t_\gamma \text{ em } \Gamma_\sigma, \quad (2)$$

onde  $D$  e  $N$  representam respectivamente o *operador diferencial de equilíbrio* e a matriz que reúne as componentes da *normal exterior unitária* à fronteira estática.

As condições de compatibilidade no domínio e na fronteira cinemática podem ser escritas no seguinte formato matricial [8]:

$$\varepsilon = D^* u \text{ em } V, \quad (3)$$

$$u = u_\gamma \text{ em } \Gamma_u, \quad (4)$$

onde  $D^*$  representa o *operador diferencial de compatibilidade*.

Na fase elástica, a relação constitutiva do material é do tipo linear, podendo ser definida no formato de flexibilidade por [8]:

$$\varepsilon = f \sigma. \quad (5)$$

A *condição de cedência* permite definir o limite a partir do qual se iniciam as deformações plásticas. Pode ser escrita na forma:

$$f(\hat{\sigma}, \kappa) \leq 0, \quad (6)$$

onde  $\hat{\sigma}$  representa a *tensão de comparação* e  $\kappa$  representa o *conjunto de parâmetros que caracterizam a envolvente de cedência do material*.

A *lei de escoamento* é definida por [9]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_* \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7)$$

pelo que a direcção do incremento das deformações plásticas é normal à superfície da *função de potencial plástico*  $g$ , levando a que esta lei seja frequentemente denominada por *condição de normalidade*.

A condição de escoamento plástico vem dada por [9]:

$$d\varepsilon_* \geq 0. \quad (8)$$

Assumindo uma *lei de escoamento associada*, o que corresponde a utilizar-se a mesma função  $\phi_*$  para se definir a função de cedência  $f$  e a função dos potenciais plásticos  $g$ , a condição de normalidade pode ser escrita na forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_* n_{*ij}, \quad (9)$$

sendo  $n_{*ij}$  a matriz das normais à superfície de cedência.

A *condição de consistência* conduz à determinação da intensidade do incremento da deformação plástica. Esta condição pode ser escrita na forma [9]:

$$d\phi_* = n_{*ij}^t d\sigma_{ij} - h_* d\varepsilon_* = 0. \quad (10)$$

As *condições de complementaridade* são dadas pelas igualdades [3]:

$$\phi_* d\varepsilon_* = 0 \quad ; \quad d\phi_* d\varepsilon_* = 0, \quad (11)$$

Para se poderem definir as relações de plasticidade em termos de incrementos finitos das grandezas intervenientes, admite-se que o carregamento é aplicado durante um intervalo de tempo fictício  $[\tau_{*,j}, \tau_{*,j+1}]$ , denominado *intervalo de tempo convencional de plasticidade*. Em cada intervalo, o incremento das deformações plásticas é definido por:

$$\Delta \varepsilon_p = \int_{\tau_{*,j}}^{\tau_{*,j+1}} \dot{\varepsilon}_* n_* d\tau_* . \quad (12)$$

Utilizando o *método implícito de Euler* [10], a integração anterior conduz a:

$$\Delta \varepsilon_p = \Delta \varepsilon_* n_{*,j+1} , \quad (13)$$

ficando as deformações plásticas no final do passo de carga, definidas por:

$$\varepsilon_{p,j+1} = \varepsilon_{p,j} + \Delta \varepsilon_p = \varepsilon_{p,j} + \Delta \varepsilon_* n_{*,j+1} . \quad (14)$$

A condição de escoamento plástico (8), de cedência (6), de consistência (10) e de complementaridade (11) escritas na forma incremental, são definidas respectivamente por:

$$\Delta \varepsilon_* \geq 0 , \quad (15)$$

$$\phi_* + \Delta \phi_* \leq 0 , \quad (16)$$

$$\Delta \phi_* = n_{*,j+1}^t \Delta \sigma - h_{*,j+1} \Delta \varepsilon_* , \quad (17)$$

$$\phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 \quad ; \quad \Delta \phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 . \quad (18)$$

### 3 MODELO HÍBRIDO-MISTO DE TENSÃO

No modelo híbrido-misto de tensão são aproximados simultaneamente e de forma independente os campos de tensões (19) e de deslocamentos (20) no domínio de cada elemento. São também aproximados os campos de incrementos dos parâmetros plásticos (21) no domínio de cada elemento e o campo de deslocamentos na fronteira estática (22):

$$\sigma = S_v X \quad em V , \quad (19)$$

$$u_v = U_v q_v \quad em V , \quad (20)$$

$$\Delta \varepsilon_* = P_* \Delta e_* \quad em V , \quad (21)$$

$$u = U_\gamma q_\gamma \quad em \Gamma_\sigma . \quad (22)$$

As matrizes  $\{S_v, U_v, P_*, U_\gamma\}$  reúnem as funções de aproximação associadas às variáveis generalizadas  $\{X, q_v, \Delta e_*, q_\gamma\}$ . As grandezas duais associadas às variáveis discretas introduzidas são definidas de forma a serem energeticamente consistentes com as variáveis contínuas que aproximam [1]. Obtêm-se desta forma as seguintes definições para as

deformações generalizadas ( $e$ ), forças de massa generalizadas ( $Q_v$ ), e forças na fronteira generalizadas ( $Q_\gamma$ ) e incrementos dos potenciais plásticos generalizados ( $\Delta\Phi_*$ ).

$$e = \int S_v^t \varepsilon dV \quad ; \quad Q_v = \int U_v^t b dV \quad ; \quad Q_\gamma = \int U_\gamma^t t_\gamma d\Gamma_\sigma \quad ; \quad \Delta\Phi_* = \int P_*^t \Delta\phi_* dV. \quad (23)$$

Substituindo a aproximação do campo de tensões (19) nas expressões que resultam da imposição ponderada das condições de equilíbrio no domínio (1) e na fronteira (2), obtém-se as condições de equilíbrio no modelo discreto [1]:

$$A_v^t X = -Q_v, \quad (24)$$

$$A_\gamma^t X = Q_\gamma, \quad (25)$$

onde: 
$$A_v = \int (DS_v)^t U_v dV \quad ; \quad A_\gamma = \int (NS_v)^t U_\gamma d\Gamma_\sigma. \quad (26)$$

Impondo ponderadamente as condições de compatibilidade no domínio (3), integrando por partes a segunda parcela para se mobilizarem os termos de fronteira e substituindo na expressão resultante a aproximação dos campos de deslocamentos no domínio (20) e na fronteira (22), obtém-se a condição de compatibilidade no modelo discreto [1]:

$$e = -A_v q_v + A_\gamma q_\gamma + e_\gamma, \quad (27)$$

$$e_\gamma = \int (NS_v)^t u_\gamma d\Gamma_u. \quad (28)$$

A utilização das funções de aproximação dos campos de tensões (19), para impor ponderadamente a relação constitutiva escrita no formato de flexibilidade (5), permite obter as relações constitutivas em fase elástica do modelo discreto [1]:

$$e_e = F X, \quad (29)$$

onde: 
$$F = \int S_v^t f S_v dV. \quad (30)$$

A substituição da aproximação (21) na imposição ponderada da lei de escoamento (13) permite obter [3]:

$$\Delta e_p = N_* \Delta e_*, \quad (31)$$

onde: 
$$N_* = \int S_v^t n_{*,j+l} P_* dV. \quad (32)$$

A condição de escoamento plástico (15) define-se no modelo de elementos finitos através da substituição da variável contínua pela discreta correspondente:

$$\Delta e_* \geq 0. \quad (33)$$

A condição de cedência (16) é imposta na forma de resíduos pesados. Tendo em conta a

definição (23) é possível escrever:

$$\Phi_* + \Delta\Phi_* \leq 0. \quad (34)$$

Substituindo as aproximações (19) e (21) na imposição ponderada da condição de consistência (17), obtém-se:

$$\Delta\Phi_* = N_*^t \Delta X - H_* \Delta e_*, \quad (35)$$

onde:

$$H_* = \int P_*^t h_{*,j+1} P_* dV. \quad (36)$$

As condições de complementaridade (18), são definidas no modelo discreto por [3]:

$$\Phi_*^t \Delta e_* = 0 \quad ; \quad \Delta\Phi_*^t \Delta e_* = 0. \quad (37)$$

O sistema governativo elastoplástico resulta da combinação das condições de equilíbrio (24) e (25), das condições de compatibilidade (27) e das relações constitutivas (29) e (31). Considere-se o instante final de um passo de carga  $[\tau_{*,j}, \tau_{*,j+1}]$ , a que designaremos de forma simplificada por instante  $(j+1)$ , o sistema governativo na forma incremental fica então definido pelo seguinte conjunto de equações e inequações [4]:

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\gamma & N_* \\ A_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j + \Delta X \\ q_{v,j} + \Delta q_v \\ q_{\gamma,j} + \Delta q_\gamma \\ \Delta e_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\gamma,j} + \Delta e_\gamma - e_{pp,j} - \Delta e_{pp} - e_{\theta,j} - \Delta e_\theta - e_{pe,j} - \Delta e_{pe} - e_{p,j} \\ -Q_{v,j} - \Delta Q_v - Q_{p,j} - \Delta Q_p \\ -Q_{\gamma,j} - \Delta Q_\gamma + Q_{\gamma p,j} + \Delta Q_{\gamma p} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\Phi_{*,j} + \Delta\Phi_* \leq 0; \quad \begin{cases} (\Phi_{*,j} + \Delta\Phi_*)^t \Delta e_* = 0; & \Delta e_* \geq 0 \\ \Delta\Phi_*^t \Delta e_* = 0 \end{cases}$$

A utilização dos polinómios ortogonais de Legendre como funções de aproximação dos campos de tensões e de deslocamentos, permite obter soluções analíticas para o cálculo da maioria dos operadores presentes em (38) e elevados níveis de esparsidade [2].

Recorrendo ao método implícito de Euler na integração das relações constitutivas, é necessário incorporar um procedimento iterativo (método de Newton-Raphson), pois no início de cada incremento de carga são necessários dados definidos no seu final, nomeadamente  $n_{*,j+1}$  [10].

Os restos a eliminar em cada iteração podem ser calculados através de [4]:

$$\begin{aligned} R_1^i &= F \left( X_j + \sum_i^{N_u} \Delta X^i \right) + A_v \left( q_{v,j} + \sum_i^{N_u} \Delta q_v^i \right) - A_\gamma \left( q_{\gamma,j} + \sum_i^{N_u} \Delta q_\gamma^i \right) + N_*^i \Delta e_*^i + e_{p,j} - e_{\gamma,j+1} + e_{pp,j+1} + e_{\theta,j+1} + e_{pe,j+1} \\ R_2^i &= A_v^t \left( X_j + \sum_i^{N_u} \Delta X^i \right) + Q_{v,j+1} + Q_{p,j+1} \quad ; \quad R_3^i = -A_\gamma^t \left( X_j + \sum_i^{N_u} \Delta X^i \right) + Q_{\gamma,j+1} - Q_{\gamma p,j+1} \quad ; \quad R_4^i = \Phi_{j+1}^i \end{aligned} \quad (39)$$

A aplicação da técnica de Newton-Raphson corresponde a determinar os incrementos a considerar para cada uma das variáveis, através da igualdade:

$$\begin{bmatrix} F+M_*^i & A_v & -A_\gamma & N_*^i \\ A_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \\ (N_*^i)^t & 0 & 0 & H_*^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^i \\ \Delta q_v^i \\ \Delta q_\gamma^i \\ \Delta e_*^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^i \\ R_2^i \\ R_3^i \\ R_4^i \end{bmatrix}, \quad (40)$$

onde:

$$M_*^i = \int S_v^t \frac{\partial^2 \phi_*}{\partial \sigma_{j+1}^2} S_v \Delta \varepsilon_* dV. \quad (41)$$

A definição da matriz anterior (*Hessiana*) pode ser encontrada com maior detalhe nas referências [4, 7].

A solução final do incremento de carga ( $j+1$ ), após  $N_{it}$  iterações até à convergência, pode ser obtida de:

$$X_{j+1} = X_j + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta X^i ; \quad q_{v,j+1} = q_{v,j} + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta q_v^i ; \quad q_{\gamma,j+1} = q_{\gamma,j} + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta q_\gamma^i ; \quad \Delta e_{*,j+1} = \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta e_*^i. \quad (42)$$

#### 4 CONTROLO DA CEDÊNCIA

Foram implementadas duas técnicas para o controlo da cedência: o *controlo em pontos de colocação* (PC) e o *controlo em células plásticas* (CP). Para que se verifique localmente a condição de escoamento plástico (33) as funções que constituem a base de aproximação  $P_*$ , são escolhidas de forma a apresentarem no seu domínio sempre valores não negativos.

No método de controlo com base em pontos de colocação, a plasticidade é controlada de uma forma pontual. Foram utilizadas *funções de Dirac*  $\delta(\gamma, \psi)$  [4] na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos. Desta forma, para cada modo de cedência  $m$ , o potencial plástico generalizado  $\Phi_*$  está apenas associado a um ponto  $(\gamma_0, \psi_0)$  do domínio no referencial local (Figura 2a), tomando o valor da função dos potenciais plásticos nesse ponto,

$$\Phi_*^m = \phi_*(\gamma_0, \psi_0). \quad (43)$$

No controlo em células plásticas, foram implementados três conjuntos de funções de aproximação para os parâmetros plásticos. O primeiro consiste na consideração de uma única função constante de valor unitário. O segundo conjunto é definido utilizando quatro funções do tipo bilinear (Figura 2b). Por último, considerou-se também um conjunto de 9 funções obtidas através do produto nas duas direcções de polinómios de segundo grau. A definição matemática destas funções pode ser encontradas em Mendes[7].

O valor do potencial plástico  $\Phi_*$  associado ao modo  $m$ , pode ser calculado através de:

$$\Phi_*^m = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (P_*^m(\gamma, \psi))^t \phi_*(\gamma, \psi) |J(\gamma, \psi)| d\psi d\gamma, \quad (44)$$

onde  $|J(\gamma, \psi)|$  representa o Jacobiano de transformação de coordenadas entre o referencial global e o local.

A integração presente na expressão (44) é efectuada numericamente, através da utilização da técnica de *quadratura de Gauss* [13]:

$$\Phi_*^m = \sum_I^n \sum_I^n [P_*^m(\gamma, \psi) \phi_*(\gamma, \psi) W |J(\gamma, \psi)|], \quad (45)$$

onde  $n$  representa o número de pontos em cada direcção e  $W$  representa o peso associado a cada ponto.

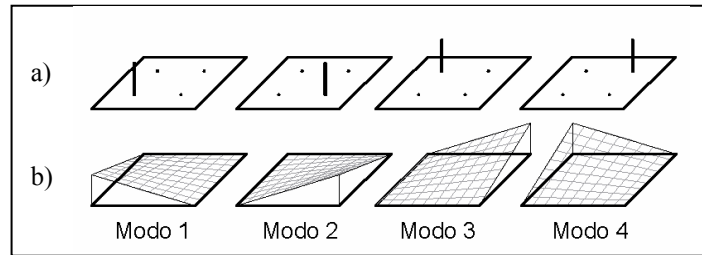


Figura 2. Técnicas de controlo da cedência.

### 5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Para estudar a eficiência das técnicas de controlo da cedência implementadas, analisou-se uma placa quadrada em consola sujeita uma carga uniforme no topo (Figura 3). A estrutura foi discretizada recorrendo a apenas um elemento finito e implementou-se o critério de cedência de von Mises. As aproximações são construídas com um conjunto completo de polinómios de Legendre até ao grau máximo definido por  $g_{sv}$  no caso das tensões, por  $g_{uv}$  no caso dos deslocamentos no domínio e por  $g_{uy}$  no caso dos deslocamentos nas fronteiras estáticas.

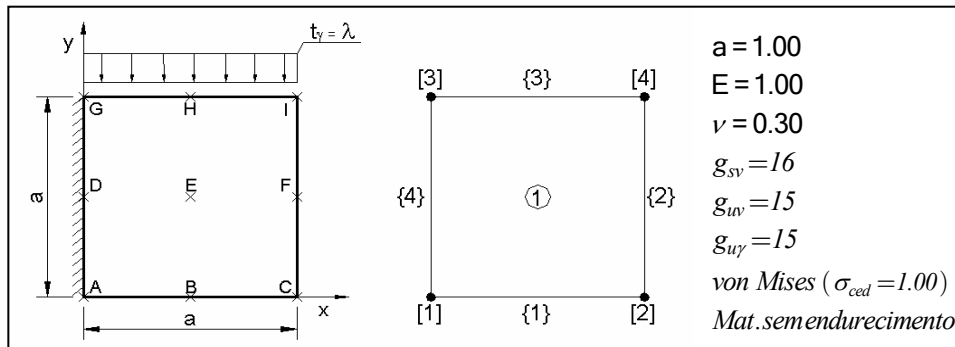


Figura 3. Definição das características da placa quadrada em consola.

Para aferir a qualidade dos resultados obtidos, efectuou-se a análise deste mesmo exemplo com um programa de elementos finitos comercial [12]. Este programa utiliza a formulação tradicional (formulação de deslocamento) e para o caso em estudo, recorre a um modelo de plasticidade associada. A consola foi analisada recorrendo a 225 elementos 2D de 8 nós e obtiveram-se os resultados apresentados na Figura 4.



Estes resultados foram considerados como valores de referência para as análises efectuadas com o modelo HMT. Comparou-se tanto o valor final do parâmetro de carga,  $\lambda_{ref} = 0.4215$ , como a evolução do diagrama carga vs magnitude do deslocamento do ponto F (ver Figura 3).

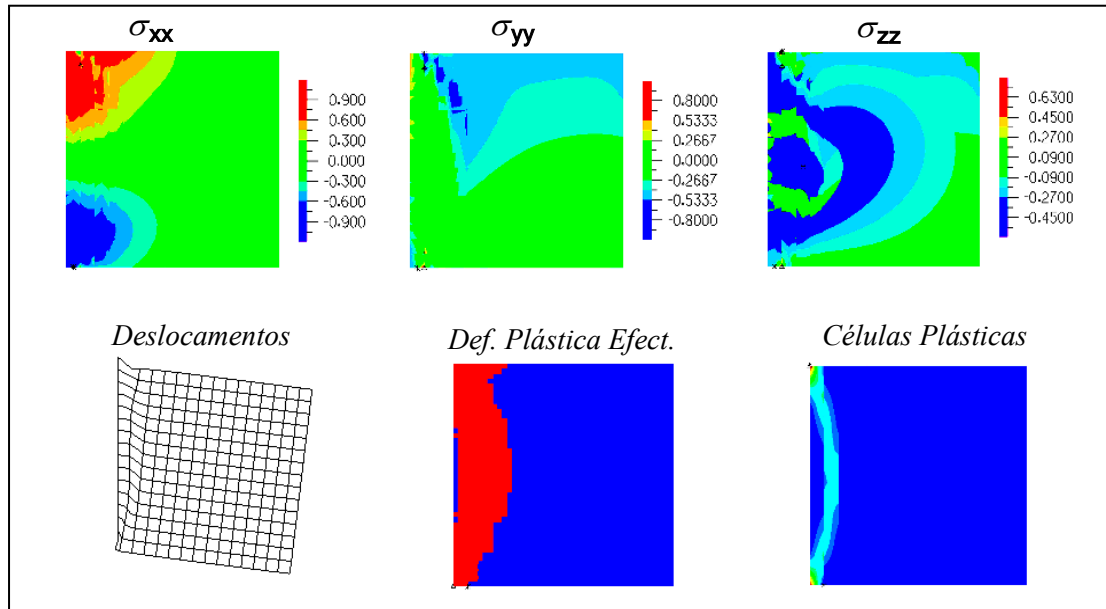


Figura 4. Resultados de um programa de elementos finitos tradicionais (adap. de [12]).

Para se estudar a eficiência das técnicas de controlo da cedência foram elaborados 16 modelos, definidos com diferentes combinações de pontos de colocação e de células plásticas (Tabela 1).

Os pontos de colocação são definidos numa malha uniforme de pontos equidistantes. Foram utilizadas células plásticas com uma, quatro e nove funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos, a que designaremos simplifcadamente por *CEL1*, *CEL4* e *CEL9*.

Foi necessário definir o ponto de paragem para o cálculo, pois da forma como o modelo numérico está definido, o cálculo evolui com incrementos de carga muito pequenos que vão dando origem a deformações muito grandes. Definiu-se para todos os modelos analisados, que o colapso da estrutura, e o conseqente final do cálculo, acontece sempre que a magnitude do deslocamento no ponto F,  $\delta_f$ , obtido da aproximação do campo de deslocamentos no domínio, for igual ou superior a dez,  $\delta_f \geq 10$ , a que se designou  $\lambda_u$ . Foi escolhido este valor numérico, pois nesta fase a resposta da estrutura é na sua globalidade plástica e porque os incrementos de carga nesta fase são já muito pequenos.

Na figura 5 representa-se os campos de tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ , os campos de deslocamentos no domínio  $u_v$ , os modos de cedência activos (a vermelho) e o gráfico carga-deslocamento ( $\lambda - \delta_f$ ) para os modelos 4, 8, 12 e 15, no instante de colapso convencionado.

Na Tabela 1 apresentam-se também os resultados obtidos para a carga última dos modelos.

Salienta-se que para os modelos 5 e 9, a forma grosseira utilizada para o controlo da plasticidade, conduziu a situações em que não foi possível obter convergência, ou em que os

incrementos de carga foram tão pequenos que levaram a considerar-se que a análise terminou prematuramente.

DESIGNAÇÃO	Tipo de Controlo Cedência	nº Pontos de Colocação	nº Células Plásticas	nº Modos de Cedência	$\delta_f$	$\lambda_u$	$\lambda_u/\lambda_{ref}$
MODELO 1	Pontos de Colocação	10x10=100	0	100	10.00	0.8157	1.9352
MODELO 2	Pontos de Colocação	15x15=225	0	225	10.00	0.6311	1.4972
MODELO 3	Pontos de Colocação	20x20=400	0	400	10.00	0.5755	1.3652
MODELO 4	Pontos de Colocação	30x30=900	0	900	10.00	0.4237	1.0053
MODELO 5	Células Plásticas - CEL1	0	5x5=25	25	3.4981	0.57808	1.3715
MODELO 6	Células Plásticas - CEL1	0	10x10=100	100	10.00	0.44606	1.0583
MODELO 7	Células Plásticas - CEL1	0	15x15=225	225	10.00	0.4318	1.0244
MODELO 8	Células Plásticas - CEL1	0	20x20=400	400	10.00	0.4226	1.0026
MODELO 9	Células Plásticas - CEL4	0	5x5=25	100	3.4614	0.5630	1.3358
MODELO 10	Células Plásticas - CEL4	0	10x10=100	400	10.00	0.4360	1.0344
MODELO 11	Células Plásticas - CEL4	0	15x15=225	900	10.00	0.4223	1.0019
MODELO 12	Células Plásticas - CEL4	0	20x20=400	1600	10.00	0.4168	0.9889
MODELO 13	Células Plásticas - CEL9	0	5x5=25	225	10.00	0.6279	1.4897
MODELO 14	Células Plásticas - CEL9	0	10x10=100	900	10.00	0.4326	1.0264
MODELO 15	Células Plásticas - CEL9	0	15x15=225	2025	10.00	0.4190	0.9941
MODELO 16	Células Plásticas - CEL9	0	20x20=400	3600	10.00	0.4162	0.9874

Tabela 1. Características dos modelos analisados e valores finais para o parâmetro de carga  $\lambda$ .

A figura 6 ilustra o andamento da relação entre o valor da carga  $\lambda$  e a magnitude do deslocamento no ponto F,  $\delta_f$ , tendo sido agrupados os modelos em função da técnica de controlo ou do tipo de células plásticas.

Da comparação entre os resultados apresentados nas Figuras 6a e 6b, observa-se que apenas no Modelo 4 (900 pontos de colocação) os resultados se aproximaram dos de referência, enquanto que para os Modelos 6, 7 e 8 (100, 225 e 400 células plásticas do tipo *CEL1*) o andamento foi semelhante ao da curva de referência.

Da comparação dos resultados apresentados nas Figuras 6c e 6d, conclui-se que a utilização de células plásticas do tipo *CEL9*, face às células tipo *CEL4*, traz poucos benefícios em termos da qualidade dos resultados, pois em termos dos andamentos obtidos e ao parâmetro de carga final  $\lambda_u$ , os resultados são muito semelhantes. No entanto, é preciso salientar que o número de modos de cedência correspondentes à utilização de células do tipo *CEL9*, é superior ao dobro do que se obtém quando se adopta a utilização de células do tipo *CEL4*.

Para melhor podermos comparar a eficiência das técnicas de controlo implementadas, ilustram-se na Figura 7a os resultados normalizados do parâmetro de carga último, face ao número de pontos de colocação ou células plásticas e na Figura 7b face ao número total de modos de cedência.

Da análise da Figura 7a, sobressai mais uma vez o número elevado de pontos de colocação necessários à obtenção de soluções com resultados finais semelhantes aos de referência.

Observa-se também que, para os diversos tipos de células plásticas, os resultados obtidos foram semelhantes. Assim sendo, a melhoria de resultados deu-se essencialmente com o aumento do número das células e não com o aumento do número de modos de cedência.

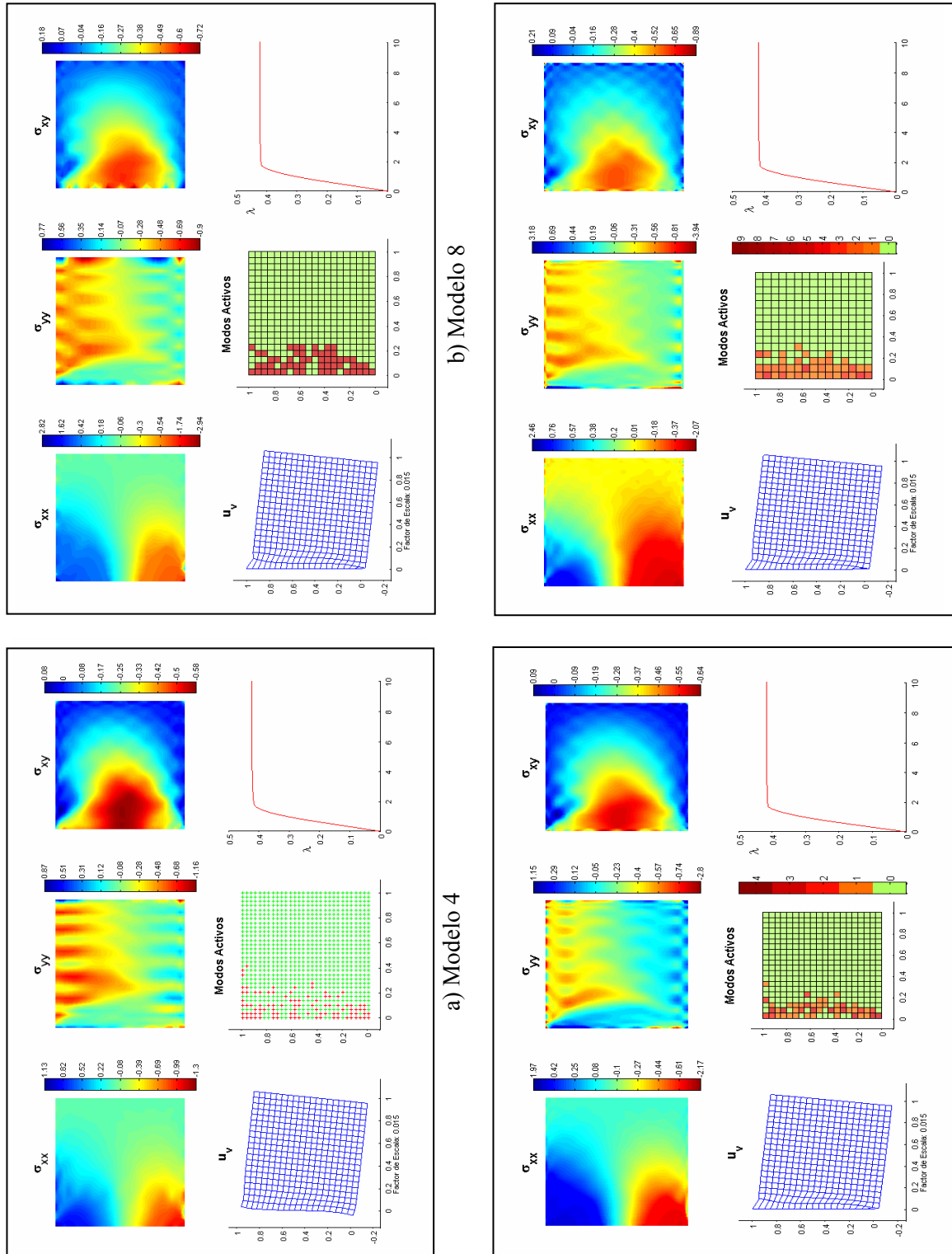


Figura 5. Resultados obtidos para os Modelos 4, 8, 12 e 15 - ( $\delta_f = 10$ ).

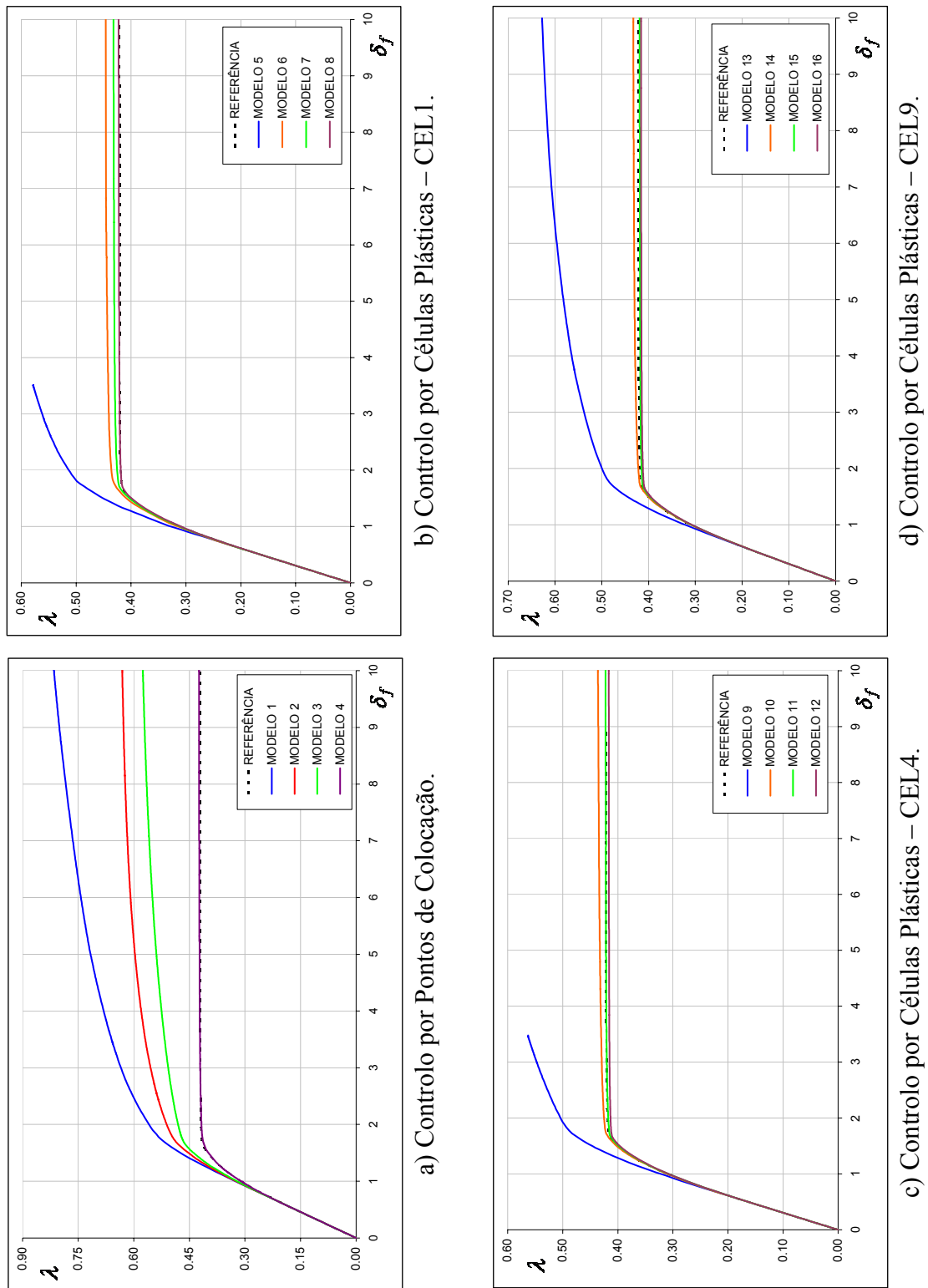


Figura 6. Gráficos Carga-Deslocamento ( $\lambda - \delta_f$ ), para os diversos modelos analisados.

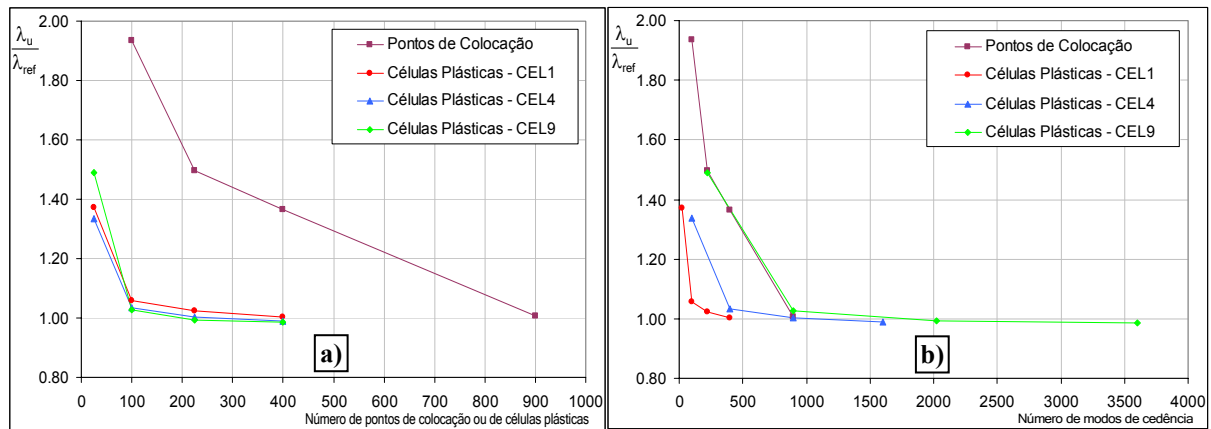


Figura 7. Comparação do valor final do parâmetro de carga com o número de PC ou CP e com o número de modos de cedência.

Quando se compara a relação entre a qualidade dos resultados finais obtidos e o número de modos de cedência (Figura 7b), conclui-se que as melhores relações são obtidas com as células plásticas tipo *CEL1*, enquanto que os piores resultados são obtidos com os pontos de colocação e com as células plásticas do tipo *CEL9*.

De acordo com estes resultados, desaconselha-se a utilização de células plásticas com um elevado número de modos de cedência, pois conforme se pode verificar facilmente nas Figuras 5c) e 5d), as respostas em regime elastoplástico desenvolveram-se activando em cada célula um número pequeno de modos de cedência. No entanto, há que ter em conta que uma maior variedade de funções de aproximação dos parâmetros plásticos  $P_*$ , pode permitir uma maior qualidade na simulação do aparecimento e desenvolvimento das deformações plásticas, embora neste caso não tivesse conduzido a uma melhoria significativa de resultados.

Na sequência das análises efectuadas para o estudo da eficiência das diferentes técnicas de controlo da cedência, considerou-se pertinente estudar casos em que se utilizasse em simultâneo a técnica *PC* e a técnica *CP*, a que designaremos por *Técnica Mista*. Procurou-se desenvolver e testar estratégias de controlo de cedência que permitissem obter soluções de melhor qualidade com recurso a um menor número de modos de cedência.

	Tipo de Controlo Cedência	Nº Pontos de Colocação	Nº Células Plásticas	Nº Modos de cedência	$\lambda_u$	$\lambda_u/\lambda_{ref}$	$\Delta$
MODELO 6	Células Plásticas - CEL1	0	100	100	0.44606	1.0583	5.83%
MODELO 7	Células Plásticas - CEL1	0	225	225	0.4318	1.0244	2.44%
MODELO 8	Células Plásticas - CEL1	0	400	400	0.4226	1.0026	0.26%
MODELO 17	Misto (CEL1+P.Colocação)	42	100	142	0.43942	1.0425	4.25%
MODELO 18	Misto (CEL1+P.Colocação)	62	225	287	0.42043	0.9975	0.25%

Tabela 2. Características dos modelos e o parâmetro de carga ( $\lambda_u$ ) - Técnica Mista.

Analisaram-se dois modelos definidos com recurso às células plásticas do tipo *CEL1*, que conforme já foi referido, revelaram a melhor relação entre a qualidade dos resultados e o número de modos de cedência. Foi ainda incluído nas extremidades dos elementos um conjunto de pontos de colocação equidistantes, de forma a contrabalançar com um pequeno

acréscimo de modos de cedência, o inconveniente da técnica das células plásticas associado ao facto de não controlar isoladamente os pontos nas extremidades dos elementos, onde se geram picos de tensão.

As características dos modelos e os resultados obtidos encontram-se ilustrados na tabela 2, onde  $\Delta$  representa o erro relativo referente à avaliação do valor da carga de rotura ( $\lambda_u$ ) face aos resultados de referência. Da análise desta informação verifica-se que a qualidade da solução obtida pelo Modelo 17 superou a do Modelo 6, aproximando-se dos resultados do Modelo 7 que é definido com maior número de células e de modos. Já para a análise com o Modelo 18, os resultados obtidos superaram largamente os do Modelo 7, chegando mesmo a ser mais próximos da solução de referência  $\lambda_{ref}$  que os obtidos pelo Modelo 8.

Salienta-se que como as soluções obtidas não são nem equilibradas nem compatíveis, nada se pode concluir com base nos teoremas de análise limite. Apenas com considerações energéticas mais avançadas, seria possível estabelecer considerações sobre quais as melhores soluções.

## 6 CONCLUSÕES

Dos resultados apresentados é possível extrair as seguintes conclusões:

- As técnicas de controlo da cedência PC e CP, funcionaram bem com o modelo HMT. A análise comparativa dos dois métodos permitiu concluir que a técnica de controlo baseada em células plásticas é globalmente mais eficiente que a técnica baseada em pontos de colocação.
- Quando se adopta a técnica CP, os resultados obtidos foram fortemente condicionados pelo número de células e praticamente independentes do número de modos de cedência considerados em cada uma das células. Concluiu-se que o tipo de células mais eficiente é o que recorre a apenas uma função de aproximação (*CELI*).
- Neste trabalho desenvolveu-se e testou-se uma configuração mista, que combina as duas técnicas de controlo atrás referidas. Esta técnica permitiu obter resultados de idêntica qualidade, com recurso a um menor número de modos de cedência, sendo portanto aconselhável a sua utilização.

## 7 AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito das actividades de investigação do Núcleo de Análise de Estruturas do ICIST – Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção do IST, tendo sido financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia através do Programa de Financiamento Plurianual e pelo Projecto POCTI/ECM/33066/2001.

## 8 REFERÊNCIAS

- [1] J.A.T. Freitas, J.P.B.M. Almeida e E.M.B.R. Pereira, *Non-Conventional Formulations for the Finite Element Method*, Computational Mechanics, Vol.23, pp. 488-501 (1999).
- [2] E.M.B.R. Pereira e J.A.T. Freitas, *A Hybrid-Mixed Finite Element Model Based on Legendre Polynomials for Reissner-Mindlin Plates* – Computer Methods in Applied

- Mechanics and Engineering –Elsevier Science S.A., nº136, pp.111-126 (1996).
- [3] L.M.S.S. Castro, *Wavelets e Séries de Walsh em Elementos Finitos*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico (1996).
  - [4] F. Bussamra, *Elementos Finitos Híbridos-Treffitz: Um Modelo Elastoplástico Tridimensional*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (1999).
  - [5] M.F. Lourenço, “Elementos Finitos de Tensão – Aplicação à Análise Elastoplástica de Estruturas Laminares Planas”, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa (2000).
  - [6] L.A.M. Mendes e L.M.S.S. Castro, *Modelos Híbridos-Mistos na Análise Elastoplástica de Estruturas Laminares*, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional - Évora, Vol. IV, 2079-2088 (2003).
  - [7] L.A.M. Mendes, *Modelos de Elementos Finitos Híbridos-Mistos de Tensão na Análise Elastoplástica de Estruturas Laminares Planas*, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa (2002).
  - [8] S.P. Timoshenko J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2ª edição, Mc-Graw Hill (1982).
  - [9] W. Chen, *Constitutive Equations for Engineering Materials*, Volume 2: Plasticity and Modeling, Elsevier (1994).
  - [10] M.A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of solids and Structures*, Volume 1, John Wiley & Sons Ltd (1991).
  - [11] E.M.B.R. Pereira, *Elementos Finitos de Tensão, Aplicação à Análise Elástica de Estruturas*, Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa (1993).
  - [12] Adina R & D, Inc, *A.D.I.N.A. - Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis, 900 Nodes Version 7.4.0* (2000).
  - [13] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics – Fourth Edition*, John Wiley & Sons (1979).