

VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional

Universidade de Évora

14 a 16 de Abril de 2003

MODELOS HÍBRIDO-MISTOS NA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS LAMINARES

Luís A. M. Mendes¹, Luís M. S. S. Castro²

RESUMO

Nesta comunicação é apresentado um modelo híbrido-misto de tensão que permite efectuar a análise elasto-plástica de placas e de lajes. Este modelo baseia-se na utilização de polinómios ortogonais de Legendre como funções de aproximação. Os campos de tensões e de deslocamentos no domínio e os campos de deslocamentos ao longo da fronteira estática são aproximados de forma independente e simultânea. Para modelar os fenómenos locais associados ao desenvolvimento de deformações plásticas, os incrementos dos parâmetros plásticos são também aproximados de forma independente. O modelo permite considerar de forma integrada diferentes tipos de condições de cedência; Mises-Hencki, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. As condições fundamentais do problema são impostas na forma de resíduos pesados. As ponderações são efectuadas por forma a garantir-se que o modelo discreto resultante possua as características do modelo contínuo que pretende representar. Para cada incremento de carga, o sistema de equações não-linear é resolvido com recurso ao método de Newton-Raphson.

1. INTRODUÇÃO

Em anos recentes foram desenvolvidos modelos híbridos-mistos de tensão, Freitas(1999), para a análise elasto-plástica de estruturas laminares planas, Castro(1996), Lourenço(1999). Nestes trabalhos o sistema governativo não-linear foi resolvido com recurso a uma variante do método das perturbações, Castro(1996). A adopção deste método, não obstante a sua robustez e elegância conceptual, conduziu à implementação de modelos numéricos bastante pesados computacionalmente. Para além desta limitação, esses modelos permitem apenas a consideração da condição de cedência de Mises-Hencki.

¹ Aluno de Mestrado, Dept. Engenharia Civil e Arquitectura, Instituto Superior Técnico, Lisboa

² Professor Auxiliar, Dept. Engenharia Civil e Arquitectura, Instituto Superior Técnico, Lisboa

O modelo apresentado nesta comunicação surge na sequência natural dos trabalhos acima referidos. Para tornar menos demorada a análise, é utilizado o método de Newton-Raphson, Bussamra(1999), na resolução do sistema de equações não-linear. Foi também generalizada a implementação de condições de cedência por forma a tornar possível a modelação de materiais caracterizados por resistência combinada de atrito e coesão, Chen(1994) e Nayak(1972).

No modelo aqui apresentado, os campos de tensões e de deslocamentos são aproximados em simultâneo e de forma independente. Também o campo de deslocamentos ao longo da fronteira estática é modelado de forma independente. Para definir estas aproximações utilizam-se polinómios ortogonais de Legendre, Pereira(1999).

Para se modelarem os fenómenos associados à plasticidade, cada elemento finito é subdividido num conjunto de células críticas onde se aproxima a distribuição dos incrementos dos parâmetros plásticos. Esta aproximação pode ser obtida com recurso à utilização de um conjunto completo de funções polinomiais, que possuam valores não negativos em todo o seu intervalo de definição. A técnica de controle baseada na consideração de pontos de colocação (usualmente coincidentes com os pontos de integração), pode ser de imediato recuperada se se considerarem funções de Dirac na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos.

No modelo híbrido-misto, as condições de fronteira cinemática e a condição de escoamento plástico são verificadas *a priori*. As restantes condições são impostas ponderadamente, na forma de resíduos pesados. Esta ponderação é efectuada por forma a garantir que no modelo discreto se preserve a dualidade estática-cinemática, a reciprocidade elástica e a plasticidade associada. O sistema governativo é obtido através da combinação das condições de equilíbrio, compatibilidade, elasticidade e plasticidade.

O modelo numérico apresentado foi implementado no ambiente de programação Matlab(1999). A ilustração da sua utilização é efectuada com base na análise elastoplástica de uma consola quadrada.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se um domínio V , tal como se encontra ilustrado na Fig. 1, delimitado pela fronteira Γ , sujeito a forças de massa b e a forças aplicadas na fronteira t_γ . Considere-se a fronteira cinemática Γ_u e a fronteira estática Γ_σ , como as regiões da fronteira onde são conhecidos respectivamente os deslocamentos e as tensões aplicadas.

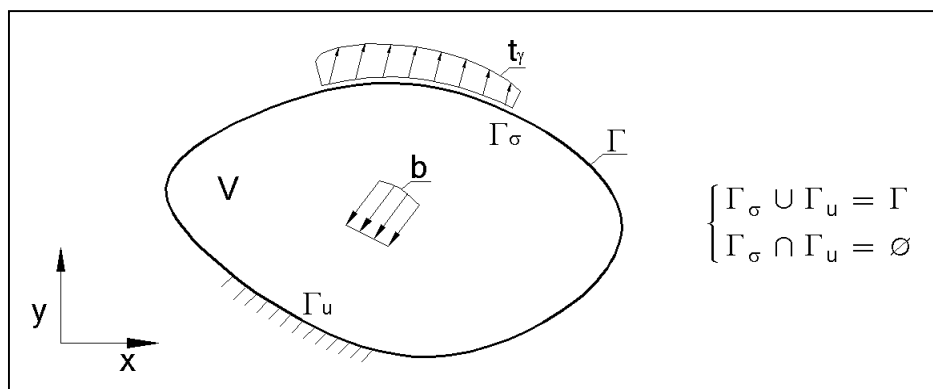


Fig. 1 - Domínio V e fronteiras Γ_σ e Γ_u do sólido elástico a analisar.

As equações de equilíbrio podem ser obtidas estabelecendo o equilíbrio de forças num elemento infinitesimal, Timoshenko(1982). Estas equações podem ser escritas na forma matricial:

$$D \sigma + b = 0 \text{ em } V, \quad (1)$$

$$N \sigma = t_\gamma \text{ em } \Gamma_\sigma, \quad (2)$$

onde D e N representam respectivamente o *operador diferencial de equilíbrio* e a matriz que reúne as componentes da *normal exterior unitária* à fronteira estática:

As condições de compatibilidade no domínio e na fronteira cinemática podem ser escritas no seguinte formato matricial, Timoshenko(1982):

$$\varepsilon = D^* u \text{ em } V, \quad (3)$$

$$u = u_\gamma \text{ em } \Gamma_u. \quad (4)$$

Na fase elástica, a relação constitutiva do material é do tipo linear, podendo ser definida no formato de flexibilidade (5):

$$\varepsilon = f \sigma. \quad (5)$$

A *condição de cedência* permite definir o limite a partir do qual se iniciam as deformações plásticas. Pode ser escrita na forma:

$$f(\hat{\sigma}, \kappa) \leq 0, \quad (6)$$

onde $\hat{\sigma}$ representa a tensão de comparação e κ representa o conjunto de parâmetros que caracterizam a envolvente de cedência do material.

A *lei de escoamento* define-se como, Chen(1994):

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_* \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7)$$

pelo que a direcção do incremento das deformações plásticas é normal à superfície da *função de potencial plástico* g .

A *condição de escoamento plástico* vem dada por, Chen(1994):

$$d\varepsilon_* \geq 0. \quad (8)$$

Assumindo uma lei de escoamento associada, o que corresponde a utilizar-se a mesma função ϕ_* para se definir a função de cedência f e a função dos potenciais plásticos g , a condição de normalidade pode ser escrita na forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_* n_*, \quad (9)$$

sendo n_* a matriz das normais à superfície de cedência.

A *condição de consistência* conduz à determinação da intensidade do incremento da deformação plástica. Esta condição pode ser escrita na forma, Chen(1994):

$$d\phi_* = n_*^t d\sigma_{ij} - h_* d\varepsilon_* = 0. \quad (10)$$

As *condições de complementaridade* são dadas pelas igualdades, Castro(1996):

$$\phi_* d\varepsilon_* = 0, \quad (11)$$

$$d\phi_* d\varepsilon_* = 0. \quad (12)$$

Para se poderem definir as relações de plasticidade em termos de incrementos finitos das grandezas intervenientes, admite-se que o carregamento é aplicado durante um intervalo

de tempo fictício $[\tau_{*,j}, \tau_{*,j+1}]$, denominado *intervalo de tempo convencional de plasticidade*. Em cada intervalo, o incremento das deformações plásticas é definido por:

$$\Delta \varepsilon_p = \int_{\tau_{*,j}}^{\tau_{*,j+1}} \dot{\varepsilon}_* n_* d\tau_* \quad (13)$$

Utilizando o *método implícito de Euler*, Crisfield(1991), a integração das relações (13) conduz a:

$$\Delta \varepsilon_p = \Delta \varepsilon_* n_{*,j+1}, \quad (14)$$

ficando as deformações plásticas no final do passo de carga, definidas por:

$$\varepsilon_{p,j+1} = \varepsilon_{p,j} + \Delta \varepsilon_p = \varepsilon_{p,j} + \Delta \varepsilon_* n_{*,j+1}. \quad (15)$$

A condição de escoamento plástico (8), de cedência (6), de consistência (10) e de complementaridade (11) e (12) escritas na forma incremental, são definidas por:

$$\Delta \varepsilon_* \geq 0, \quad (16)$$

$$\phi_* + \Delta \phi_* \leq 0, \quad (17)$$

$$\Delta \phi_* = n_{*,j+1}^t \Delta \sigma - h_{*,j+1} \Delta \varepsilon_*, \quad (18)$$

$$\phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 \quad ; \quad \Delta \phi_* \Delta \varepsilon_* = 0. \quad (19)$$

3. MODELO HÍBRIDO-MISTO DE TENSÃO

No modelo híbrido-misto de tensão, são aproximados simultaneamente e de forma independente os campos de tensões (20) e de deslocamentos (21) no domínio de cada elemento. São também aproximados o campo de incrementos dos parâmetros plásticos (22) e o campo de deslocamentos na fronteira estática (23).

$$\sigma = S_\gamma X \quad em \ V, \quad (20)$$

$$u_v = U_v q_v \quad em \ V, \quad (21)$$

$$\Delta \varepsilon_* = P_* \Delta e_* \quad em \ V, \quad (22)$$

$$u = U_\gamma q_\gamma \quad em \ \Gamma_\sigma. \quad (23)$$

As matrizes $\{S_\gamma, U_v, P_*, U_\gamma\}$ reúnem as funções de aproximação associadas às variáveis generalizadas $\{X, q_v, \Delta e_*, q_\gamma\}$. As grandezas duais associadas às variáveis discretas introduzidas, são definidas por forma a serem energeticamente consistentes com as variáveis contínuas que aproximam, Freitas(1999). Obtêm-se desta forma as seguintes definições para as *deformações generalizadas* (e), *forças de massa generalizadas* (Q_v), *incrementos dos potenciais plásticos generalizados* ($\Delta \Phi_*$), e *forças na fronteira generalizadas* (Q_γ):

$$e = \int S_v^t \varepsilon dV \quad ; \quad Q_v = \int U_v^t b dV \quad ; \quad Q_\gamma = \int U_\gamma^t t_\gamma d\Gamma_\sigma \quad ; \quad \Delta \Phi_* = \int P_*^t \Delta \phi_* dV. \quad (24)$$

A substituição da aproximação do campo de tensões (20) nas expressões que resultam da imposição ponderada das condições de equilíbrio no domínio (1) e na fronteira (2) conduz à obtenção das condições de equilíbrio no modelo discreto, (25) e (26). Os operadores intervenientes nessa definição são determinados através das igualdades (27), Freitas(1999).

$$A_v^t X = -Q_v, \quad (25)$$

$$A_\gamma^t X = Q_\gamma, \quad (26)$$

$$A_v = \int (D S_v)^t U_v dV \quad ; \quad A_\gamma = \int (N S_v)^t U_\gamma d\Gamma_\sigma. \quad (27)$$

Impondo ponderadamente as condições de compatibilidade no domínio (3), integrando por partes a segunda parcela para se mobilizarem os termos de fronteira e substituindo na expressão resultante a aproximação dos campos de deslocamentos no domínio (21) e na fronteira (23), obtém-se a condição de compatibilidade no modelo discreto, (28), Freitas (1999).

$$e = -A_v q_v + A_\gamma q_\gamma + e_\gamma \quad ; \quad e_\gamma = \int (N S_v)^t u_\gamma d\Gamma_u. \quad (28)$$

As relações constitutivas no modelo discreto (29), são obtidas substituindo-se na imposição ponderada da equação (5) a aproximação definida para o campo de tensões (20). A matriz de flexibilidade generalizada, F, é definida pela igualdade (30), Pereira(1999).

$$e_e = F X, \quad (29)$$

$$F = \int S_v^t f S_v dV. \quad (30)$$

A substituição da aproximação (22) na imposição ponderada da lei de escoamento (14) permite obter, Castro(1996):

$$\Delta e_p = N_* \Delta e_* \quad ; \quad N_* = \int S_v^t n_{*,j+1} P_* dV. \quad (31)$$

A condição de escoamento plástico (16) define-se no modelo de elementos finitos através da substituição da variável contínua pela discreta correspondente:

$$\Delta e_* \geq 0. \quad (32)$$

A condição de cedência (17) é imposta na forma de resíduos pesados. Tendo em conta as definições (24) é possível escrever:

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0. \quad (33)$$

Substituindo as aproximações (20) e (22) na imposição ponderada da condição de consistência (18), é possível obter:

$$\Delta \Phi_* = N_*^t \Delta X - H_* \Delta e_* \quad ; \quad H_* = \int P_*^t h_{*,j+1} P_* dV. \quad (34)$$

As condições de complementaridade no modelo discreto são dadas por, Castro(1996):

$$\Phi_*^t \Delta e_* = 0 \quad ; \quad \Delta \Phi_*^t \Delta e_* = 0. \quad (35)$$

O sistema de governativo (36), válido quando se assume um comportamento elástico linear, resulta da combinação das condições de equilíbrio (25) e (26), das condições de compatibilidade (28) e das relações de elasticidade (29). A exploração das propriedades dos polinómios ortogonais de Legendre permite obter soluções analíticas, Pereira(1999) para todos os operadores estruturais presentes no sistema (36).

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\gamma \\ A_v^t & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ q_v \\ q_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\gamma \\ -Q_v \\ -Q_\gamma \end{bmatrix} \quad (36)$$

O sistema governativo elastoplástico pode ser obtido do sistema elástico, adicionando-lhe as relações de plasticidade. Considere-se o instante final de um passo de carga $[\tau_{*,j}, \tau_{*,j+1}]$, a que designaremos de forma simplificada por instante $(j+1)$. É possível demonstrar, Bussamra(1999), que:

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\gamma & N_* \\ A_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j+1} \\ q_{v,j+1} \\ q_{\gamma,j+1} \\ \Delta \epsilon_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\gamma,j+1} - e_{pp,j+1} - e_{\theta,j+1} - e_{pe,j+1} - e_{p,j} \\ -Q_{v,j+1} - Q_{p,j+1} \\ -Q_{\gamma,j+1} + Q_{\gamma p,j+1} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\Phi_{*,j+1} \leq 0; \quad \Delta e_* \geq 0. \quad (38)$$

O processo de carregamento deve ser tal que se verifiquem também as condições de complementaridade:

$$(\Phi_{*,j} + \Delta \Phi_*)^t \Delta e_* = 0 \quad ; \quad \Delta \Phi_*^t \Delta e_* = 0.$$

4. ALGORITMO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

Na resolução do sistema governativo não-linear utilizou-se o método de Newton-Raphson, Bussamra(1999) e Crisfield(1991).

Os restos definidos no passo de carga $[j, j+1]$, no final da iteração (i) , podem ser calculados através de:

$$\begin{cases} R_1^i = F X_{j+1}^i + A_v q_{v,j+1}^i - A_\gamma q_{\gamma,j+1}^i + N_*^i \Delta e_*^i - e_{\gamma,j+1} - e_{p,j} \\ R_2^i = A_v^t X_{j+1}^i + Q_{v,j+1} \\ R_3^i = -A_\gamma^t X_{j+1}^i + Q_{\gamma,j+1} \\ R_4^i = \Phi_{j+1}^i \end{cases}. \quad (39)$$

Considerando que no início de cada passo de carga, as variáveis tomam o valor final do passo de carga anterior:

$$X_{j+1}^0 = X_j; \quad q_{v,j+1}^0 = q_{v,j}; \quad q_{\gamma,j+1}^0 = q_{\gamma,j}; \quad \Delta e_{*,j+1}^0 = 0,$$

os restos podem ser definidos da seguinte forma:

$$R_1^i = F \left(X_j + \sum_i^{N_{it}} \Delta X^i \right) + A_v \left(q_{v,j} + \sum_i^{N_{it}} \Delta q_v^i \right) - A_\gamma \left(q_{\gamma,j} + \sum_i^{N_{it}} \Delta q_\gamma^i \right) + N_*^i \Delta e_*^i - e_{\gamma,j+1} - e_{p,j}, \quad (40)$$

$$R_2^i = A_v^t \left(X_j + \sum_i^{N_{it}} \Delta X^i \right) + Q_{v,j+1}; \quad R_3^i = -A_\gamma^t \left(X_j + \sum_i^{N_{it}} \Delta X^i \right) + Q_{\gamma,j+1}; \quad R_4^i = \Phi_j + \sum_i^{N_{it}} \Delta \Phi^i. \quad (41)$$

A aplicação da técnica de Newton-Raphson corresponde a determinar os incrementos a considerar para cada uma das variáveis, através da igualdade:

$$\begin{bmatrix} F+M_*^i & A_v & -A_\gamma & N_*^i \\ A_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -A_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \\ (N_*^i)^t & 0 & 0 & H_*^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X^i \\ \Delta q_v^i \\ \Delta q_\gamma^i \\ \Delta e_*^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^i \\ R_2^i \\ R_3^i \\ R_4^i \end{bmatrix}, \quad (42)$$

onde:

$$M_*^i = \int S_v^t \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \sigma_{j+1}^2} S_v \Delta \epsilon_* dV. \quad (43)$$

A definição da matriz *Hessiana* pode ser encontrada em Bussamra(1999).

A solução final do incremento de carga ($j+1$), após N_{it} iterações até à convergência, pode ser obtida de:

$$X_{j+1} = X_j + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta X^i \quad ; \quad q_{v,j+1} = q_{v,j} + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta q_v^i, \quad (44)$$

$$q_{\gamma,j+1} = q_{\gamma,j} + \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta q_{\gamma}^i \quad ; \quad \Delta e_{*,j+1} = \sum_{i=1}^{N_{it}} \Delta e_*^i. \quad (45)$$

5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta secção pretende-se ilustrar a aplicação do modelo numérico apresentado. Para o efeito analisa-se uma placa em consola quadrada sujeita a uma carga uniforme no topo, conforme se indica na Fig. 2.

A placa foi discretizada com recurso a apenas um elemento finito, tendo-se utilizado polinómios de Legendre de grau máximo g_s para aproximar o campo de tensões, g_{uv} para o campo de deslocamentos no domínio e g_{ug} para o campo de deslocamentos nas fronteiras estáticas.

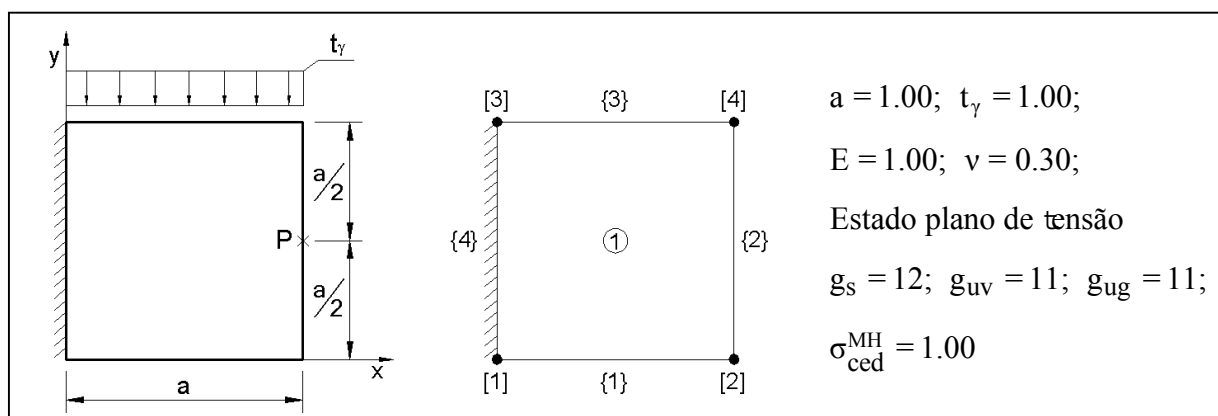


Fig. 2 – Características da placa analisada.

Neste exemplo efectuaram-se duas análises distintas. Na primeira é utilizada a técnica de controle da cedência baseada em pontos de colocação, tendo-se considerado 4x4 grupos de 5x5 pontos, perfazendo um total de 400 pontos, conforme se indica nas Fig. 3 e 4. Na segunda análise é utilizada a técnica de controle com base em células críticas, recorrendo a um função de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos P_* constante e de valor unitário. Implementou-se 20x20 células definidas com 3x3 pontos de integração de Gauss, Fig. 5. Para podermos comparar os resultados de ambas análises, utilizou-se a mesma condição de cedência, que no caso foi a de Mises-Hencki.

Nas Figuras 3, 4 e 5 apresentam-se para diversas etapas de carregamento, a evolução dos campos de tensões e de deslocamentos no domínio dos elementos, bem como os pontos ou células utilizadas para o controle da cedência, indicando-se a preto quais os que se encontram activos. Para ilustrar o andamento não linear do modelo, representa-se ainda o gráfico carga-deslocamento, onde se regista a evolução do parâmetro de carga λ em função do deslocamento absoluto do ponto P indicado na Fig. 2.

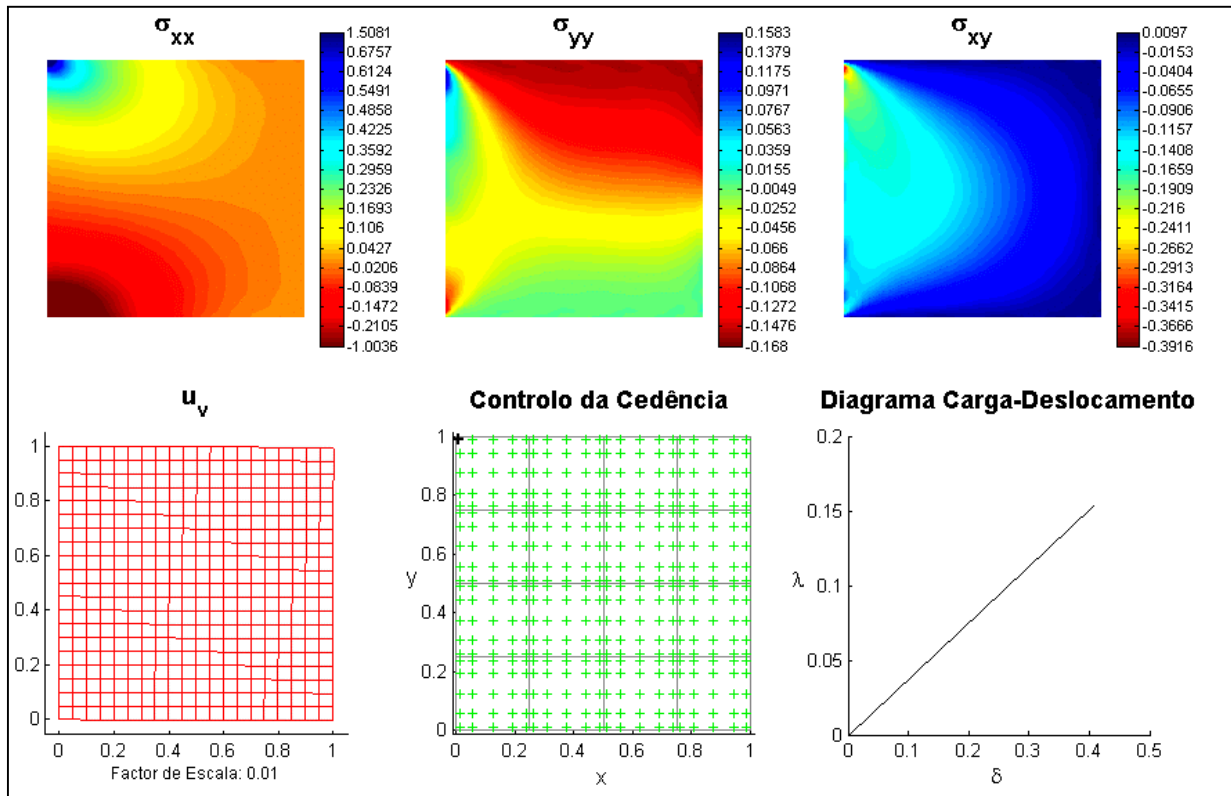


Fig. 3 – Análise com controle da cedência em pontos de colocação – ($\lambda = 0.1533 t_\gamma$).

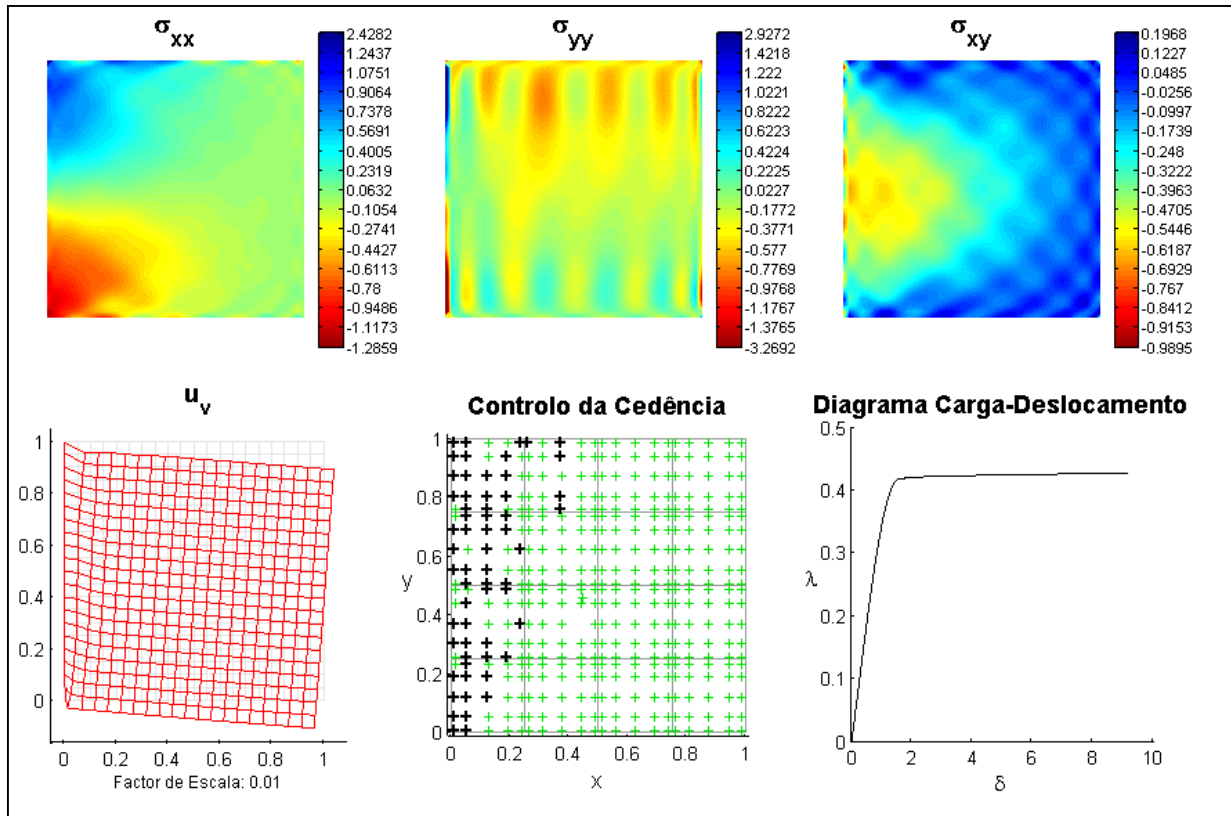


Fig. 4 – Análise com controle da cedência em pontos de colocação – ($\lambda = 0.4265 t_\gamma$).

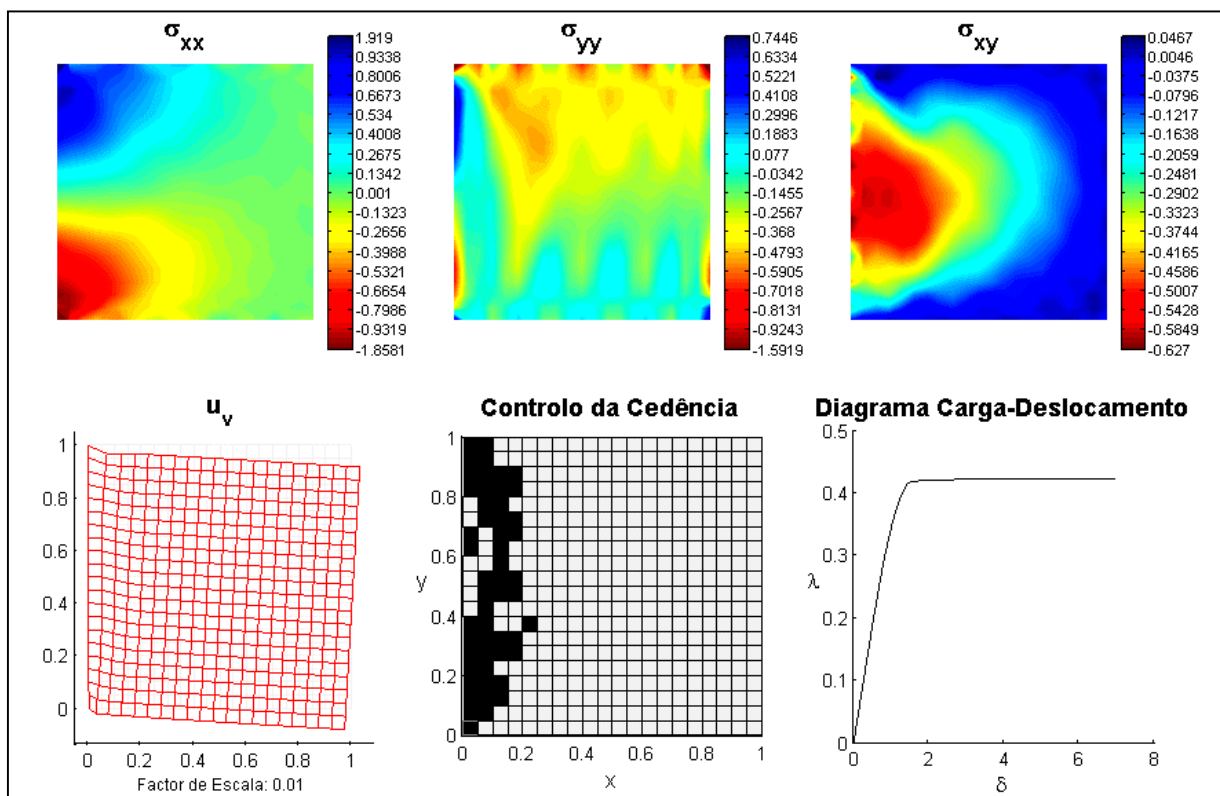


Fig. 5 – Análise com controle da cedência em células críticas – ($\lambda = 0.4225t_\gamma$).

Da análise dos exemplos anteriores, observa-se que ambos modelos forneceram soluções do ponto de vista qualitativo semelhantes. No entanto, na análise onde o controle da cedência se efectuou em pontos da colocação, os campos de tensões apresentam algumas flutuações, levando mesmo ao aparecimento de modos activos não esperados (Fig. 4). Este fenómeno é de origem numérica, sendo consequência da introdução de singularidades na solução pelo controle pontual da cedência, levando à mobilização de polinómios de grau elevado, que irão introduzir estas flutuações no restante domínio do elemento. Por outro lado, quando o controle é efectuado em células críticas, a imposição da cedência envolve de forma ponderada toda a região da célula, tendo como consequência o andamento mais regular para o campo de tensões e da plasticidade (Fig. 5).

Nas duas análise, o valor obtido para o parâmetro de carga no colapso é semelhante ao que foi determinado em Castro(1996).

6. CONCLUSÕES

Os testes efectuados ao modelo apresentado permitiram tirar as seguintes conclusões:

i) Na resolução do sistema de equações não lineares, o método de Newton-Raphson revelou-se eficaz e estável do ponto de vista numérico. Embora não tenha sido efectuada uma comparação directa com o método das Perturbações, tudo leva a crer que o algoritmo que utiliza o método de Newton-Raphson seja mais rápido, necessitando de uma menor quantidade de cálculos e de capacidade de armazenamento de informação.

ii) O controle da cedência com base em pontos de colocação revelou-se fiável e rápido. No entanto, o seu carácter pontual pode introduzir perturbações locais no campo estático, podendo levar à ocorrência artificial de cedência e flutuações na solução. O controlo

da cedência com base em células tem a vantagem de permitir diluir este efeito, visto toda a área de definição da célula ser considerada de forma ponderada. No entanto, tem as desvantagens de ser mais complexo de formular, e de necessitar calcular os operadores com recurso a técnicas de integração numérica, levando a maiores necessidades de tempo de cálculo.

iii) As funções ortogonais de Legendre apresentaram um bom desempenho numérico, permitindo obter boas soluções na generalidade das situações. O facto de serem ortogonais origina sistemas governativos com elevados níveis de esparsidade, levando à redução no tempo de montagem e de resolução do sistema, caso se utilize algoritmos adaptados a matrizes esparsas.

7. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito dos programas de investigação do Núcleo de Análise de Estruturas do Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico. Foi financiado pela FCT no âmbito do Programa de Financiamento Plurianual e através do projecto de investigação POCTI denominado *Elementos Finitos de Tensão para a Análise de Barragens de Betão* (ECM-33066-99-00).

8. REFERÊNCIAS

Bussamra, F., “Elementos Finitos Híbridos-Treffitz: Um Modelo Elastoplástico Tridimensional”, dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999.

Castro, L.M.S.S., "Wavelets e Séries de Walsh em Elementos Finitos", Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, 1996.

Chen, W., "Constitutive Equations for Engineering Materials", Volume 2: Plasticity and Modeling, Elsevier, 1994.

Crisfield, M.A., “Non-Linear Finite Element Analysis of solids and Structures”, Volume 1, John Wiley & Sons Ltd, 1991.

Freitas, J.A.T. e Moitinho de Almeida, J.P.B., e Pereira, E.M.B.R., "Non-conventional formulations for the finite element method", Computational Mechanics, Vol. 23, pp. 488-501, 1999.

Lourenço, M.F., “Elementos Finitos de Tensão – Aplicação à Análise Elastoplástica de Estruturas Laminares Planas”, dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1999.

Matlab, “The Language Of Technical Computing”, - Version 5.3.0.10183 R11, The MathWorks Inc., 1999.

Nayak, G.C. e Zienkiewicz, O.C., “Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 113-135, 1972.

Pereira, E.M.B.R. e Freitas, J.A.T., “Numerical Implementation of a Hybrid-Mixed Finite Element Model for Reissner-Mindlin Plates”, Computers & Structures, Elsevier Science Ltd, 1999.

Timoshenko, S.P. e Goodier, J.N., “Theory of Elasticity”, 2ª edição, Mc-Graw Hill, 1982.